Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Ausgangspunkt (klassisch)

1 Teilchen im elektromagnet. Feld, nicht-relativistisch

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial L}{\partial r_k} \stackrel{!}{=} 0 \qquad k = 1,2,3 \; (x,y,z)$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{r}_k = q\,E_k(\underline{r},t) + q\left(\dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)_k}$$

auf der rechten Seite steht die k-te Komponente der Lorentzkraft

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Verallgemeinerung auf viele Teilchen ($i = 1,\ldots,N$)

Annahme: $m_i = m$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^{N} q_i\,\phi(\underline{r}_i,t) + \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{A}(\underline{r}_i,t)$$

umschreiben mit den "mikroskopisch" definierten Ladungsdichte und Stromdichten:

Punktladungen

$$\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \qquad \text{Ladungsdichte}$$

(Wir nehmen hier an, dass die Ladungsdichte alleine durch die N geladenen Teilchen generiert wird!)

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \dot{\underline{r}}_i(t)\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \qquad \text{Stromdichte}$$

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r} \left[-\rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t) \right] \quad (*)$$

Frage:
Wie lautet die Lagrangefunktion für das Gesamtsystem aus Teilchen und Feldern?

Antwort:

Addiere zu (*) den Beitrag des freien Strahlungsfeldes hinzu!

$$L_{full} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 + \underbrace{\int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \overbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}^{\underline{E}^2(\underline{r},t)} - \frac{1}{2\mu_0} \overbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}^{\underline{B}^2(\underline{r},t)} \right.}_{\text{freies Strahlungsfeld}}$$

$$\left. - \int d\underline{r} \left(\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) - \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t) \right) \right)$$

Beachte: die Variablen dieser Lagrange-Funktion sind jetzt die $\underline{r}_i(t)$, d.h. die Koordinaten der bewegten Teilchen, sowie die Felder $\phi(\underline{r},t)$, $A_k(\underline{r},t)$

Interpretation der einzelnen Terme in L_{full}

$$\boxed{\begin{aligned} L_{full} &= L_{Teilchen} + L_{Feld} + L_{Kopplung} \qquad (**) \\ \text{mit } L_{Teilchen} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 \quad \text{: Hier nur kinetische Energie} \\ L_{Feld} &= \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2 \right) \quad \text{freies Strahlungsfeld} \\ L_{Kopplung} &= \int d\underline{r} \left(-\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t) \right) \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

- Der Anteil $L_{Teilchen} + L_{Kopplung}$ führt mit den Euler-Lagrange-Gl. bzgl. $\underline{r}_i$ und $\dot{\underline{r}}_i$ auf die Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft (wie gehabt!)
- Der Anteil $L_{Feld} + L_{Kopplung}$ führt mit den Euler-Lagrange-Gl. bzgl. ϕ und A_k auf die Maxwell-Gl. der Elektrodynamik (wie gehabt!)

Bis jetzt alles klassisch!

Frage: Wie lautet der zugehörige Hamiltonoperator?

Im Prinzip klar: — Berechnung konjugierte Impulse (bzgl. r_i, ϕ, A_k)
— Hamiltondichte via Legendre-Transformation
— Quantisierung der kanonisch konjugierten Größen

Vereinfachung:

Wir schreiben $\mathcal{L}_{Feld}$ zunächst etwas um, indem wir die Coulomb-Eichung benutzen
(bisher ~~war~~ war $\mathcal{L}_{Feld}$ unabhängig von der Eichung!)

$\longrightarrow$ Eliminierung irrelevanter dyn. Variablen

Idee: Wir spalten die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ auf in longitudinale bzw. transversale Anteil bzgl. des Wellenvektors $\underline{k}$

(Vorstellung $\underline{E} \sim \underbrace{\underline{E}(\underline{k})}_{\text{Fourier-Komponente}} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$ für den räuml. Anteil)

betrachte Fourier-Komponente

$$\underline{E}(\underline{k}) = \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) + \underline{E}_{\perp}(\underline{k}) \qquad \text{mit} \quad \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{(\underline{k}\cdot\underline{E})\cdot\underline{k}}{k^2}$$

$$\underline{E}_{\perp}(\underline{k}) = \underline{E}(\underline{k}) - \underline{E}_{\parallel}(\underline{k})$$

analog für $\underline{B}(\underline{k})$

Maxwell-Gleichungen

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0 \iff \underline{k}\cdot\underline{B}(\underline{k}) = 0 \implies \underbrace{\underline{B}_{\parallel}(\underline{k})}_{\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B})\underline{k}}{k^2}} = 0$$

Magnetfeld ist rein transversal!

$$\nabla\cdot\underline{E} = \rho/\varepsilon_0 \iff \varepsilon_0\, i\,\underline{k}\cdot\underline{E}(\underline{k}) = \rho(\underline{k})$$

$$\implies \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{(\underline{k}\cdot\underline{E})\cdot\underline{k}}{k^2} = -\frac{i\underline{k}}{\varepsilon_0 k^2}\rho(\underline{k},t)$$

Der Longitudinalanteil von $\underline{E}$ ist also durch die Ladungsverteilung bestimmt

Alles unabhängig von der Eichung!

$\Longrightarrow$ Die longitudinalen Anteile $\underline{B}_{\parallel}$, $\underline{E}_{\parallel}$ sind keine relevanten dynamischen Variablen!

Außerdem folgt in der Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{k} \cdot \underline{A}(\underline{k}) = 0$$

$\Longrightarrow$ auch Vektorpotential $\underline{A}$ ist rein transversal!
(genau wie $\underline{B}$)

$$\underline{A} = \underline{A}_{\perp}$$

Folgerung für $\underline{E}$:

$$\underline{E} = \underline{E}_{\parallel} + \underline{E}_{\perp} \overset{!}{=} -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

, Coulomb-Eichung: Potentialgleichung!

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \underline{E}_{\parallel} &= -\nabla\phi \\ \underline{E}_{\perp} &= -\dot{\underline{A}}_{\perp} = -\dot{\underline{A}} \end{aligned}\right\} \text{ für Coulombeichung!}$$

Zurück zur Lagrangedichte $\mathcal{L}_{Feld}$. Betrachte die Anteile $L_{Feld} + L_{Kopplung}$, die von den Feldern abhängen

$$L_{Feld} + L_{Kopplung} = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}^2} - \rho\,\phi + \underline{j}\cdot\underline{A} \right)$$

betrachte davon speziell

$$I = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) \right)$$

$$= \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} (\underline{E}_{\parallel} + \underline{E}_{\perp})^2 - \rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) \right)$$

$$= \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\underline{E}_{\parallel}^2 + \underline{E}_{\perp}^2 + 2 \underbrace{\underline{E}_{\parallel}\cdot\underline{E}_{\perp}}_{0} \right) - \rho\phi \right)$$

$$\overset{\text{Coulomb-Eichung}}{=} \int d\underline{r} \, \frac{\varepsilon_0}{2} (\dot{\underline{A}})^2 + \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \underline{E}_{\parallel}^2 - \rho\phi \right) \qquad \underline{E}_{\perp} = -\dot{\underline{A}} = \dot{\underline{A}}_{\perp}$$

benutze

Parseval-Theorem

$$\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\left(\underline{E}_{\parallel}(\underline{r},t)\right)^2}_{\text{Dimension Energie}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{k}\left(\underbrace{\tilde{\underline{E}}_{\parallel}(\underline{k},t)}_{\text{Fouriertransformierte von } \underline{E}_{\parallel}(\underline{r},t)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{k}\,\frac{|\tilde{\rho}(\underline{k},t)|^2}{\varepsilon_0^2 k^2}$$

$$\tilde{\underline{E}}_{\parallel} = \frac{-i\underline{k}}{\varepsilon_0 k^2}\tilde{\rho}(\underline{k},t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(\underline{r},t) &= \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))\\ \tilde{\rho}(\underline{k},t) &= \int d\underline{r}\, e^{i\underline{k}\underline{r}}\rho(\underline{r},t)\\ &= \sum_i q_i\, e^{i\underline{k}\underline{r}_i}\end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_i q_j \int d\underline{k}\,\frac{1}{k^2}\, e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r}_i-\underline{r}_j)}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}' \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i-\underline{r}_j|}$$

Coulombenergie der wechselwirkenden Ladungen

Rechnung s. Elektrodynamik

Notation $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}' \ldots = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \ldots$

Die divergierenden Terme mit $j=i$ müssen abgezogen werden!

Außerdem (in I)

Coulombeichung: $\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ alles instantan!

$$\int d\underline{r}\,\rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\,\rho(\underline{r},t)\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

benutze wieder mikroskopische Ladungsdichte

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i-\underline{r}_j|}$$

(Keine Terme mit $i=j$!)

Kombiniere alles

$\Rightarrow$ Neuer Ausdruck für L_{full} in der Coulomb-Eichung

$$L_{Full} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\underline{r}}_i^2}_{\text{Teilchen}} + \underbrace{\int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2\right)}_{\text{freies Strahlungsfeld}}\ \boxed{+\int d\underline{r}\ \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t) - W_{Coulomb}}$$

Beitrag von $\underline{E}_{\perp}^2$

neuer Kopplungsbeitrag!

wobei $W_{Coulomb} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i-\underline{r}_j|}$

(Positionen zeitabhängig)

Jetzt: Übergang zur Hamiltonfunktion

Erinnerung: $\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_i q_i \dot{\underline{r}}_i \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$

Kanonisch konjugierte Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\left(L^{\text{Teilchen}} + L^{\text{Kopplung}} \right) = m \dot{\underline{r}}_i + q_i \underline{A}(\underline{r}_i, t)$$

$$\Pi_{\underline{A}} = \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{Feld}}}{\partial \dot{\underline{A}}} \quad \text{mit } \mathcal{L}^{\text{Feld}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \underline{A})^2$$

$$= \varepsilon_0 \dot{\underline{A}} = -\underline{E}_\perp$$

(beachte: ϕ ist ja keine dyn. Variable mehr, daher brauchen wir kein Π_ϕ)