

Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Ausgangspunkt (klassisch)

1 Teilchen im elektromagnet. Feld, nicht-relativistisch

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - q \Phi(\underline{r}, t) + q \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial L}{\partial r_k} \stackrel{!}{=} 0$$

$k = 1, 2, 3$
(x, y, z)

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{r}_k = q E_k(\underline{r}, t) + q (\dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}, t))_k}$$

auf der rechten Seite steht die k -te Komponente der Gesamtkraft

$$\underline{E} = -\nabla \Phi - \dot{\underline{A}}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Verallgemeinerung auf viele Teilchen ($i = 1, \dots, N$)

Anahme: $m_i = m$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\underline{r}_i, t) + \sum_{i=1}^N q_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{A}(\underline{r}_i, t)$$

umschreiben mit den "mikroskopisch" definierten Ladungsdichte und Stromdichte

$$\rho(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \dot{\underline{r}}_i(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

Ladungsdichte

Stromdichte

hier
Wir nehmen an, dass die Ladungsdichte ρ (bzw. die N geladenen Teilchen) gegeben ist!

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r} \left[-\rho(\underline{r}, t) \Phi(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) \right] \otimes$$

Frage:

Wie lautet die Lagrange-Funktion für das Gesamtsystem aus Teilchen und Feldern?

Ansatz:

Ändern zu (*) den Betrag des freien Strahlungsfeldes hinzu!

$$L_{\text{full}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \int d\underline{r} \left(\underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\text{freies Strahlungsfeld}} - \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2}_{\text{freies Strahlungsfeld}} \right) - \int d\underline{r} \left(g(\underline{r}, t) \phi(\underline{r}, t) - \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) \right)$$

Beachte: die Variablen dieser Lagrange-Funktion sind jetzt drei $\underline{r}_i(t)$, d.h. drei Koordinaten der bewegten Teilchen, sowie die Felder $\phi(\underline{r}, t)$, $A_\mu(\underline{r}, t)$

Interpretation der einzelnen Terme in L_{full}

$$L = L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Feld}} + L_{\text{Kopplung}} \quad (**)$$

mit $L_{\text{Teilchen}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$: Hier nur kinetische Energie

$$L_{\text{Feld}} = \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2 \right) \quad \text{freies Strahlungsfeld}$$

$$L_{\text{Kopplung}} = \int d\underline{r} \left(-g(\underline{r}, t) \phi(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) \right)$$

Bemerkungen:

- Der Anteil $L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Kopplung}}$ führt mit den Euler-Lagrange-Gl. bezgl. \underline{r}_i und $\dot{\underline{r}}_i$ auf die Bewegungsgleichung und Lorentzkraft (wie gehabt!)
- Der Anteil $L_{\text{Feld}} + L_{\text{Kopplung}}$ führt mit den Euler-Lagrange-Gl. bezgl. ϕ und A_μ auf die Maxwell-Gl. der Elektrodynamik (wie gehabt!)

Bis jetzt alles Klassisch!

Frage: Wie lautet der zugehörige Hamiltonoperator?

- Im Prinzip klar:
- Berechnung Kommutator Algebra (bezgl. ψ, ϕ, A_{μ})
 - Hamiltondichte via Legendre-Transformation
 - Quantisierung der kanonischen Kommutator Größen

Vereinfachung:

Wir schreiben $\mathcal{L}_{\text{full}}$ zunächst etwas um, indem wir die Coulomb-Energie benutzen
 (bisher ~~war~~ $\mathcal{L}_{\text{full}}$ unabhängig von der Eichung!)

→ Eliminierung irrelevanter dyn. Variablen

Idee: Wir spalten die Felder \underline{E} und \underline{B} auf in longitudinalen bzw. transversalen Anteil bezgl. des Wellenvektors \underline{k}

(Vorstellung $\underline{E} \sim \underline{E}(\underline{k}) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}$ für den reell. Anteil)
 Fourier-Komponente

betrachte Fourier-Komponente

$$\underline{E}(\underline{k}) = \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) + \underline{E}_{\perp}(\underline{k}) \quad \text{mit} \quad \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{(\underline{k}\cdot\underline{E})\cdot\underline{k}}{k^2}$$

$$\underline{E}_{\perp}(\underline{k}) = \underline{E}(\underline{k}) - \underline{E}_{\parallel}(\underline{k})$$

analog für $\underline{B}(\underline{k})$

Max well-Gleichungen

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Leftrightarrow \underline{k} \cdot \underline{B}(\underline{k}) = 0 \Rightarrow \underline{B}_{\parallel}(\underline{k}) = 0 \quad \left(\frac{(\underline{k}\cdot\underline{B})\cdot\underline{k}}{k^2} \right) \quad \text{Magnetfeld ist rein transversal!}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \epsilon_0 i\underline{k} \cdot \underline{E}(\underline{k}) = \rho(\underline{k})$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{(\underline{k}\cdot\underline{E})\cdot\underline{k}}{k^2} = -\frac{i\underline{k}}{\epsilon_0 k^2} \rho(\underline{k}, \epsilon)$$

Der longitudinalanteil von \underline{E} ist also durch die Ladungsverteilung bestimmt

Alles unabhängig von der Eichung!

⇒ Die longitudinalen Anteile $\underline{E}_{||}$, \underline{E}_{\perp} sind keine relevanten dynamischen Variablen!

Außerdem folgt in der Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0 \implies \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = 0$$

⇒ auch Vektorpotential \underline{A} ist rein transversal!
(genau wie \underline{B})

$$\underline{A} = \underline{A}_{\perp}$$

Folgerung für \underline{E} :

$$\underline{E} = \underline{E}_{||} + \underline{E}_{\perp} \stackrel{!}{=} -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

Potentialerlei!
Coulomb-Eichung: $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
 $\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \underline{E}_{||} &= -\nabla\phi \\ \underline{E}_{\perp} &= -\dot{\underline{A}}_{\perp} = -\dot{\underline{A}} \end{aligned} \right\} \text{für Coulomb-Eichung!}$$

Zurück zum Lagrangeformalismus. Betrachte die Anteile $\mathcal{L}_{\text{feld}} + \mathcal{L}_{\text{Koppl}}$, die von den Feldern abhängen

$$\mathcal{L}_{\text{feld}} + \mathcal{L}_{\text{Koppl}} = \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}^2} - \rho\phi + \underline{j} \cdot \underline{A} \right)$$

betrachte dazu speziell

$$\begin{aligned} I &= \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \rho(\underline{r}, t)\phi(\underline{r}, t) \right) \\ &= \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}_{||} + \underline{E}_{\perp})^2 - \rho(\underline{r}, t)\phi(\underline{r}, t) \right) \\ &= \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}_{||}^2 + \underline{E}_{\perp}^2 + 2\underbrace{\underline{E}_{||} \cdot \underline{E}_{\perp}}_0) - \rho\phi \right) \\ &\stackrel{\text{Coulomb-Eichung}}{=} \int d\underline{r} \frac{\epsilon_0}{2} (\dot{\underline{A}})^2 + \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}_{||}^2 - \rho\phi \right) \end{aligned}$$

$$\underline{E}_{\perp} = -\dot{\underline{A}} = \dot{\underline{A}}_{\perp}$$

benutze

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d\underline{r} (\underline{E}_{II}(\underline{r}, t))^2 \stackrel{\text{Parseval-Theorem}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \int d\underline{u} (\tilde{\underline{E}}_{II}(\underline{u}, t))^2 \stackrel{\text{Fouriertransformiert von } \underline{E}_{II}(\underline{r}, t)}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \int d\underline{u} \frac{|\tilde{\underline{g}}(\underline{u}, t)|^2}{\epsilon_0^2 k^2}$$

Dimension Energie

$$\tilde{\underline{E}}_{II} = \frac{-ik}{\epsilon_0 k^2} \tilde{\underline{g}}(\underline{u}, t)$$

$$\tilde{\underline{g}}(\underline{u}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r}_i - \underline{u}, t)$$

$$\hat{\underline{g}}(\underline{u}, t) = \int d\underline{r} e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} \rho(\underline{r}, t) = \sum_i q_i e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}_i}$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \int d\underline{u} \frac{1}{u^2} e^{i\underline{u} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_j)}$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Gaulbrücke der unterschiedlichen Ladungen

Notation $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dots = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \dots$

Platz s. Elektrostatik

Die divergierende Terme mit $j=i$ müssen abgezogen werden!

Außerdem (in I)

Gaulbrücke: $\Phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ alles untere!

$$\int d\underline{r} \rho(\underline{r}, t) \Phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r} \rho(\underline{r}, t) \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

benutze wieder mittels Kronecker Ladungsdichte

(Keine Terme mit $i=j$!)

Konkurrenz alles

\Rightarrow Neuer Ausdruck für L_{full} in der Coulomb-Eichung

$$L_{\text{full}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2}_{\text{Teilchen}} + \underbrace{\int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \times \underline{A})^2 \right)}_{\substack{\text{Betrag von } \underline{E}_{II}^2 \\ \text{freies Strahlungsfeld}}} + \int d\underline{r} \dot{\underline{j}}(\underline{r}, t) \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) - W_{\text{Coulomb}}$$

neuer Kopplungsterm!

$$\text{wobei } W_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

(Positive Zeitabhängig)

Jetzt: Übergang zur Hamiltonfunktion

Kanonisch konjugierte Impulse

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} (\mathcal{L}^{\text{Teilchen}} + \mathcal{L}^{\text{Kopplung}}) = m \dot{r}_i + q_i \underline{A}(\underline{r}_i, t)$$

Erinnern:

$$\int \mathcal{L}(\underline{r}, t) = \sum_i q_i \dot{r}_i \int dt \mathcal{L}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{\pi}_A = \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{Feld}}}{\partial \dot{A}}$$

$$\text{mit } \mathcal{L}^{\text{Feld}} = \frac{\epsilon_0}{2} \dot{A}^2 - \frac{1}{2\epsilon_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$= \epsilon_0 \dot{A} = -\underline{E}_\parallel$$

(beachte: ϕ ist ja keine dyn.-Variable mehr, daher brauchen wir kein $\overline{\pi}_\phi$)