

Wechselwirkende Bosonensystem

1) Hintergrund: BE-Kondensation im "idealen" Bose-Gas
(Bose-Einstein) \hookrightarrow keine Wechselwirkung!

2) Beschreibung im Rahmen der 2. Quantisierung

Ausgangspunkt (Impulsdarstellung) $\hbar = \hbar \underline{k}$

$$\hat{H} = \sum_{\underline{k}} \epsilon_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\underline{k}} \sum_{\underline{k}'} \sum_{\underline{q}} \tilde{V}_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}+\underline{q}}^+ \hat{a}_{\underline{k}-\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{q}}$$

\leftarrow Fouriertransformation des Potentials

hohe Temperatur, schwache Wechselwirkung:

maximale Besetzung des Grundzustands!

N_0 sehr groß (von der Ordnung der Gesamtteilchenzahl N)

Zahl der Teilchen im Grundzustand

$$N_0 \approx \hat{a}_{\underline{k}=0}^+ \hat{a}_{\underline{k}=0}$$

Näherung:

Bogoliubov-Verfahren:

$$\hat{a}_{\underline{k}=0}^+ \rightarrow \sqrt{N_0}$$

$$\hat{a}_{\underline{k}=0} \rightarrow \sqrt{N_0}$$

Zahlen, keine Operatoren!

schreibe in \hat{H} die Terme der Ordnung N_0^2 und N_0 und vernachlässige die anderen Terme

Wechselwirkungsanteil von

\Rightarrow Effektive Hamiltonian:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\underline{k} \neq 0} \left(\epsilon_{\underline{k}} + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_0 + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_{\underline{k}} \right) \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} + \frac{N_0^2}{2V} \tilde{V}_0 + \sum_{\underline{k} \neq 0} \frac{N_0}{2V} \tilde{V}_{\underline{k}} (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}^+ + \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}})$$

effektive Einheitsmatrix

effektiver Einheitsmatrix-Hamiltonian

Korrekturen, abhängig von der Dichte des Kondensats ($\frac{N_0}{V}$) und von \tilde{V}_0

ungerade Terme

Zur weiteren Behandlung wollen wir \hat{H}_{eff} insgesamt in Einheitsmatrixform bringen!

Strategie: Bogoliubov-Transformation

$$\left(\rightarrow \hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\underline{k} \neq 0} \omega_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}}^+ \hat{\alpha}_{\underline{k}} + \text{Korrekturen} \right)$$

3) Bogoliubov-Transformation

Ansatz:
$$\begin{cases} \hat{a}_{\underline{k}} = u_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}} + v_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}}^+ \\ \hat{a}_{\underline{k}}^+ = u_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}}^+ + v_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}} \end{cases} \quad (*)$$

Die Operatoren $\hat{\alpha}_{\underline{k}}^+$, $\hat{\alpha}_{\underline{k}}$ sind neue Erzeugnis- bzw. Vernichtungsoperatoren!

Die ^{Vorfaktoren} $u_{\underline{k}}$, $v_{\underline{k}}$ sind reell und es gilt: $u_{\underline{k}} = u_{-\underline{k}}$, $v_{\underline{k}} = v_{-\underline{k}}$

Folgerung zunächst: $\hat{\alpha}_{\underline{k}}$, $\hat{\alpha}_{\underline{k}}^+$ erfüllen (genaus wie $\hat{a}_{\underline{k}}$, $\hat{a}_{\underline{k}}^+$) die Bose-Vertauschungsrelation!

$$[\hat{\alpha}_{\underline{k}}, \hat{\alpha}_{\underline{k}'}] = [\hat{\alpha}_{\underline{k}}^+, \hat{\alpha}_{\underline{k}'}^+] = 0, \quad [\hat{\alpha}_{\underline{k}}, \hat{\alpha}_{\underline{k}'}^+] = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$$

(Erhaltung der Kommutatoren!)

Man kann zeigen: Dies ist erfüllt, falls
$$u_{\underline{k}}^2 - v_{\underline{k}}^2 = 1 \quad (**)$$

Schreibe nun \hat{H}_{eff} mit Ansatz $(*)$ um.

Beachte z.B.

$$\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} = u_{\underline{k}}^2 \hat{\alpha}_{\underline{k}}^+ \hat{\alpha}_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}^2 \hat{\alpha}_{-\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}}^+ + u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} (\hat{\alpha}_{\underline{k}}^+ \hat{\alpha}_{-\underline{k}}^+ + \hat{\alpha}_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}})$$

$$\hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}}^+ = u_{\underline{k}}^2 \hat{\alpha}_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}}^+ + v_{\underline{k}}^2 \hat{\alpha}_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}} + u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} (\hat{\alpha}_{\underline{k}}^+ \hat{\alpha}_{\underline{k}} + \hat{\alpha}_{-\underline{k}} \hat{\alpha}_{-\underline{k}}^+)$$

$$\hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}} = \dots$$

Einssetzen in \hat{H}_{eff}

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\underline{k} \neq 0} \tilde{\epsilon}_{\underline{k}} \left(u_{\underline{k}}^2 \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}^2 \underbrace{\hat{a}_{-\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}}_{1 + \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}} + u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}} + \hat{a}_{-\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}}) \right) \left| \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{\underline{k}} = \epsilon_{\underline{k}} + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_0 + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_{\underline{k}} \\ \frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m} \end{array} \right.$$

$$+ \frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V}$$

$$+ \frac{N_0}{2V} \sum_{\underline{k} \neq 0} \tilde{V}_{\underline{k}} \left((u_{\underline{k}}^2 + v_{\underline{k}}^2) (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}^+ + \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}}) + 2 u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} + \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}}^+) \right)$$

Ziel nun: Alle Terme, die nicht proportional zu $\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}$ sind (oder konstant), sollen verschwinden!

$$\tilde{\epsilon}_{\underline{k}} u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}^+ + \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}}) + \frac{N_0}{2V} \tilde{V}_{\underline{k}} (u_{\underline{k}}^2 + v_{\underline{k}}^2) (\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{-\underline{k}}^+ + \hat{a}_{\underline{k}} \hat{a}_{-\underline{k}}) \stackrel{!}{=} 0$$

$\forall \underline{k} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \tilde{\epsilon}_{\underline{k}} u_{\underline{k}} v_{\underline{k}} + \frac{N_0}{2V} \tilde{V}_{\underline{k}} (u_{\underline{k}}^2 + v_{\underline{k}}^2) \stackrel{!}{=} 0$$

außerdem muß gelten (\otimes) $u_{\underline{k}}^2 - v_{\underline{k}}^2 = 1$ (zur Erfüllung der Bose-Vertauschungsrelation)

Die beiden Gleichungen lassen sich wie folgt erfüllen.

$$\text{definieren: } \omega_{\underline{k}} = \left(\tilde{\epsilon}_{\underline{k}}^2 - \left(\frac{N_0}{V} \tilde{V}_{\underline{k}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u_{\underline{k}}^2 = \frac{\omega_{\underline{k}} + \tilde{\epsilon}_{\underline{k}}}{2\omega_{\underline{k}}}, \quad v_{\underline{k}}^2 = \frac{-\omega_{\underline{k}} + \tilde{\epsilon}_{\underline{k}}}{2\omega_{\underline{k}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\epsilon}_{\underline{k}} = \epsilon_{\underline{k}} + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_0 + \frac{N_0}{V} \tilde{V}_{\underline{k}} \\ \text{mit } \epsilon_{\underline{k}} = \frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m} \end{array}}$$

Ergebnis für den effektiven Hamiltonian (nach der Bogoliubov-Transformation)

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\underline{1} \neq 0} \left(w_{\underline{1}} \left(\hat{\alpha}_{\underline{1}}^{\dagger} \hat{\alpha}_{\underline{1}} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\epsilon_{\underline{1}} + \frac{U_0}{V} (\hat{V}_0 + \hat{V}_{\underline{1}}) \right)}_{\hat{\epsilon}_{\underline{1}}} \right) + \frac{U_0^2}{2V} \hat{V}_0$$

mit $w_{\underline{1}} = \sqrt{\hat{\epsilon}_{\underline{1}}^2 - \left(\frac{U_0 V_0}{V}\right)^2}$

Bemerkungen

- \hat{H}_{eff} ist "diagonal" in den Eigenzuständen (Vernichtern $\hat{\alpha}_{\underline{1}}^{\dagger}, \hat{\alpha}_{\underline{1}}$ ($\hat{=}$ hat Erhaltungssymmetrie!))
- \hat{H}_{eff} enthält abstrakte Bosonen mit Energie $\hbar w_{\underline{1}}$ und Impuls $\underline{1}$ in dem Sinne, dass die $\hat{\alpha}_{\underline{1}}^{\dagger}, \hat{\alpha}_{\underline{1}}$ bosonische Vertauschungsrelation erfüllen!
- Die neuen Eigen- bzw. Vernichtern sind (laut \oplus) Linearkombinationen der "alten" (ursprünglichen) Bosonen-Operatoren $\hat{a}_{\underline{1}}^{\dagger}, \hat{a}_{\underline{1}}$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{\underline{1}} = u_{\underline{1}} \hat{a}_{\underline{1}} - v_{\underline{1}} \hat{a}_{-\underline{1}}^{\dagger} \\ \hat{\alpha}_{\underline{1}}^{\dagger} = u_{\underline{1}} \hat{a}_{\underline{1}}^{\dagger} - v_{\underline{1}} \hat{a}_{-\underline{1}} \end{cases} \quad \text{Umkehrsätze zu } \oplus$$

\Rightarrow man überlagert Zustände mit unterschiedlichen Teilchenzahlen!
- Man nennt die neuen "Teilchen", die durch $\hat{\alpha}^{\dagger}, \hat{\alpha}$ erzeugt bzw. vernichtet werden, Quasiteilchen
- Samele Analyse zur Bogoliubov-Transformation und Kanonischen Transformation (Klass. Mechanik, Hamilton-Formalismus)
 - \Downarrow Erhaltung der (Bose-) Vertauschungsrelation
 - \Downarrow Erhaltung der Poisson-Klammern!

4) Folgerungen aus der Existenz der Quantenteilchen

Schreibe dazu \hat{H}_{eff} noch etwas um

$$\hat{H}_{eff} = \underbrace{\frac{N_0 \tilde{V}_0}{2V} + \frac{1}{Z} \sum_{\underline{k} \neq 0} (\tilde{E}_{\underline{k}} - w_{\underline{k}})}_{\text{"Grundzustandsenergie"}} + \underbrace{\sum_{\underline{k} \neq 0} w_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}}}_{\text{Energie aus den "Anregungen" (Quantenteilchen)}}$$

• Diese ist offensichtlich ungleich Null
 (anders als beim idealen Bose-System, dort ist die ^{Grundzustands} Energie $E_{\underline{k} \rightarrow 0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Big|_{\underline{k} \rightarrow 0} = 0$)

• Und: Die Grundzustandsenergie erhält Betrag aus der Summe $\sum_{\underline{k} \neq 0} (\tilde{E}_{\underline{k}} - w_{\underline{k}})$

• Im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung gilt $\tilde{V}_0 = 0$, $\tilde{E}_{\underline{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $w_{\underline{k}} = \tilde{E}_{\underline{k}}$
 \Rightarrow Grundzustandsenergie verschwindet!

Der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ an sich ist dadurch festgelegt, dass keine Quantenteilchen existieren (Zahl der Quantenteilchen im Grundzustand ist Null!)

formal: $\hat{a}_{\underline{k}} |\psi_0\rangle = 0 \quad \forall \underline{k}$
 $\Rightarrow \langle \psi_0 | \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} | \psi_0 \rangle = 0$
Zahl der Teilchen im Grundzustand

Beachte: Trotzdem gibt es (in Abwesenheit von Wechselwirkungen) im Grundzustand echte Bosonen (nicht Quantenteilchen) mit Impuls $\underline{k} \neq 0$!

Dem Zahl ist

drücke \hat{a}^+, \hat{a} durch \hat{a}^+, \hat{a} aus

$$\langle \psi_0 | \sum_{\underline{k} \neq 0} \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} | \psi_0 \rangle = \dots = \sum_{\underline{k} \neq 0} \frac{w_{\underline{k}}^2}{w_{\underline{k}}} > 0$$

Dispersionsrelation und Konsequenzen für die Wärmekapazität

betrachte

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^2 - \frac{N_0^2 \tilde{v}_{\mathbf{k}}^2}{V^2}}$$

(mit Ausdruck für $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$)

$$= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar}{V} (\tilde{v}_0 + \tilde{v}_{\mathbf{k}})\right)^2 - \frac{N_0^2 \tilde{v}_{\mathbf{k}}^2}{V^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k^2 N_0}{mV} (\tilde{v}_0 + \tilde{v}_{\mathbf{k}}) + \left(\frac{N_0 \tilde{v}_0}{V}\right)^2 + \frac{N_0 \tilde{v}_{\mathbf{k}}}{V} + \frac{2N_0 \tilde{v}_0 \tilde{v}_{\mathbf{k}}}{V} - \frac{N_0^2 \tilde{v}_{\mathbf{k}}^2}{V^2}}$$

Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ dominiert der Term $\sim k^2$ unter der Wurzel!

$$\Rightarrow \omega_{\mathbf{k}} \sim k \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (\text{falls } \tilde{v}_0, \tilde{v}_{\mathbf{k}} \text{ existiert!})$$

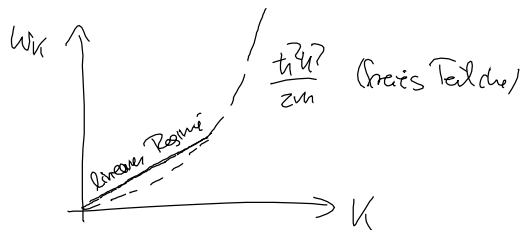
Lineare Dispersionsrelation aufgrund der Wechselwirkung!

(wie bei Phononen (Gitterschwingungen))

Im Limes großer Wellenzahlen ($k \rightarrow \infty$) dominiert der Term $\sim k^4$ unter der Wurzel!

$$\omega_{\mathbf{k}} \sim k^2 \quad \text{quadratische Dispersion}$$

wie bei freien Teilchen!



Folgerung für die Wärmekapazität:

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_V$$

Energie

Temperatur

$$\langle E \rangle = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \underbrace{\varepsilon(p)}_{\hbar\omega_p} n_p \quad p = \hbar k$$

Einheitsdimensionalität

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)} - 1}$$

Bose-Einstein
Statistik
mit $\mu=0$
(und $\beta = \frac{1}{k_B T}$)

Spezialisiere auf tiefe Temperaturen.

und den Betrag der Ausgym bei kleinen p (bzw. kleinen k)

$$\varepsilon(p) = \hbar\omega_p = \gamma|p|$$

Proportionalitätsfaktor

mittlere Energie

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \dots = \nu T^4$$

Temperatur!

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_V \sim T^3$$

Kubische Temperaturabhängigkeit!
entspricht dem ^{Mass} Ergebnis z.B. für Helium-4

(Zum Vergleich: Das ideale Bose-Gas ist charakterisiert
durch $C_V \sim T^{3/2}$ für tiefe Temperaturen)