

Ehrenfest'sche Gleichung für Erwartungswerte

betrachte  $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle$$

"Analogie" an die klassische Mechanik:

betrachte Observable

$$A(q, p, t)$$

Hamilton-Funktion

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\begin{cases} q_i = q_1, \dots, q_f \end{cases}$$

speziell:  $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$  ,  $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\langle \nabla V(x) \rangle$

"Bilder" (verschiedene Darstellung der Dynamik)

- Schrödingerbild : - Zeitabhängige Zustandsvektoren  
- Operatoren meist zeitunabhängig ( $\hat{A}_S$ )  
- Dynamische Gleichung: Schrödinger-Gleichung

• Heisenbergbild

- Operatoren sind zeitabhängig

betrachte Zeit  
Anfangszeit

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0)$$

Operate im Heisenbergbild

Zeitentwicklungsoperatoren (unitär:  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = 1$ )

Falls  $\hat{H}_S$  zeitunabhängig:

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-i \frac{t}{\hbar} \hat{H}_S}$$

$$\Leftrightarrow \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

$$\langle \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) \rangle_{\text{Heis}}$$

Erwartungswert:

$$\langle \psi(t) | \hat{A}_S | \psi(t) \rangle = \underbrace{\langle \psi(t) |}_{\text{Erwartungswert im Schrödingerbild}} \underbrace{\hat{U}^\dagger(t, 0)}_{\hat{U}^\dagger(t, 0)} \underbrace{\hat{A}_S}_{\hat{A}_H(t)} \underbrace{\hat{U}(t, 0)}_{\hat{U}(t, 0)} \underbrace{|\psi(0)\rangle}_{|\psi(0)\rangle}$$

$$= \langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0) \rangle$$

Zustand im Heisenbergbild  
(zeitunabhängig!)

Dynamische Gleichung

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{A}_H]$$

Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild)

Struktur von  $\hat{H}$  im Schrödingerbild

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$$

bekanntes  
Problem  
(zeitunabhängig)

Störung: kann zeitabhängig!

Sowohl Operatoren als auch Zustände sind zeitabhängig

$$\begin{aligned} \text{Operatoren: } \hat{A}_D(t) &= \hat{U}_0^\dagger(t,0) \hat{A}_S \hat{U}_0(t,0) \\ &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \end{aligned}$$

Dynamik der  
Operatoren wird durch  
 $\hat{H}_0$  bestimmt!

$$\frac{d\hat{A}_D(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_D, \hat{A}_D]$$

Dirac-Zustand: betrachte wieder Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{A}_S | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{U}_0 \hat{U}_0^\dagger \hat{A}_S \hat{U}_0 \hat{U}_0^\dagger | \psi(t) \rangle \\ \text{Schrödingerbild} &= \langle \psi_D(t) | \hat{A}_D(t) | \psi_D(t) \rangle \end{aligned}$$

$$|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger |\psi(t)\rangle$$

Zugehörige dyn. Gleichung:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_D(t)\rangle = \hat{H}_D^\wedge |\psi_D(t)\rangle$$

Dynamik wird durch die Störung bestimmt!

# I. Relativistische Quantenmechanik

Erinnerung: (Grundzüge der QM)

bisher kennengelernt: nicht-relativistische QM mit Hamiltonoperator  $\hat{H}$ , den man mit Hilfe von Korrespondenzregeln aus der klass. Mechanik "herleiten" kann

$\Rightarrow$  Schrödingergleichung mit  $\hat{H}$  als Bezugspunkt für die Zustände (Wellenfunktion)  $\psi(x,t)$

Konkret für ein freies Teilchen:

$E = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$  Klass., nicht-relativistisch

Korrespondenzregeln:  $\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$  (Ableitungen)

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Benutze auf beiden Seiten die Korrespondenzregel und wende das auf  $\psi(x,t)$  (mit  $\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ )

$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$  Schrödingergleichung für ein freies Teilchen  
mit  $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta$

(für Teilchen im Potential)

$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$   
 $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x)$

Zusammenhang mit Dispersionsrelation:

benutze  $E = \hbar \omega$  (Frequenz),  $p = \hbar k$  (Wellenzahl) (de Broglie Relation)

Für freies Teilchen folgt:  $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$   $k = |k|$  Wellenzahl  
nicht-relativist.

Warum nun relativistische QM?

Wesentliche Motivation: Begründung des Spins, Konsequenzen des Spins, z.B. Spin-Bahn-Wechselwirkung  
(Atomphysik)

## I.1. Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt:

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen

$$\textcircled{*} E = E_{kin} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

mit  $c$  (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit,  $m_0$  Ruhemasse und  $p$ : relativistische momentane Impuls (3-dim. Vektor)

$$p = \gamma m_0 v \quad \text{Teilchengeschwindigkeit}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left(\frac{v}{c}\right)^2 : \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \text{ klein}} 1 - \frac{1}{2}x + \dots = 1 \quad x \rightarrow 0$$

dann:  $p = m_0 v$  entspricht klass. Ergebnis

$\textcircled{*}$  wird später zur Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung benutzt

Exkurs zum Hintergrund von  $\textcircled{*}$  (spezielle Relativitätstheorie)

Vierer-Impuls

$p^\mu$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

räumliche Komponente

zeitliche Komponente

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad (*1)$$

Vienees duunndigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

mit  $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$

$$d\vec{r} = \frac{1}{\gamma} dt$$

$$dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz)$$

Skalarprodukt:

$$dx^\mu dx_\mu \left( \hat{=} \sum_{\mu=0,1,2,3} dx^\mu dx_\mu \right)$$

$$= c^2 (dt)^2 - (dx)^2$$

$$= (ds)^2$$

differenzielles Linienelement

Lorentzinvariante Größe!

$$u^\mu = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$u^0 = \gamma c$$

$$\mu=1,2,3: u^\mu = \gamma v^\mu$$

Geschwindigkeit

$\Rightarrow$  Viererimpuls explizit:

$$p^0 = m_0 \gamma c = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c$$

$$\mu=1,2,3: p^\mu = m_0 \gamma v^\mu = \frac{m_0 v^\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Diese drei Komponenten entsprechen den Komponenten des 'relativistischen mechanischen Impulses' (der in der Relativität)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Die zeitliche Komponente des Viererimpulses ( $p^0$ )

ist verbunden mit der relativistischen kinetischen Energie (relativist. Maxwell-Hubbard-Umformung)

$$p^0 = \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}$$

$$p^\mu = \left( \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, m_0 \gamma \underline{v} \right) \quad (*2)$$

Zeitkomponente

Geschwindigkeit in 3 Raumdimensionen

betrachte jetzt Skalarprodukt  $p^\mu p_\mu$

$$\text{aus } (*2): p^\mu p_\mu = \left( \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, m_0 \gamma \underline{v} \right) \cdot \left( \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, -m_0 \gamma \underline{v} \right)$$

$$= \frac{1}{c^2} \left( E_{kin}^{rel} \right)^2 - \left( m_0 \gamma \underline{v} \right)^2 \quad (I)$$

$\neq$  mechen. Anteil relativist. Impuls

aus  $\textcircled{1}$ :  $p^\mu = m_0 u^\mu$  es gilt:  $u^\mu u_\mu = c^2$

$$\Rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2 \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} = \textcircled{II} \Rightarrow (E_{kin}^{rel})^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Wurzel ziehen

$$\Rightarrow \textcircled{*} \quad (\text{Ausgangsgleichung})$$

Ende Exkurs

Zurück zur Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung

$$\textcircled{*} \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (= E_{kin}^{rel})$$

Dispersionrelation-?

benutze  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$

de-Broglie Relation  
(wie im nicht-relativist. Fall)

$$\text{aus } \textcircled{*} \quad \hbar \omega = \sqrt{\hbar^2 k^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

also ganz anders als im nicht-relativist. Fall

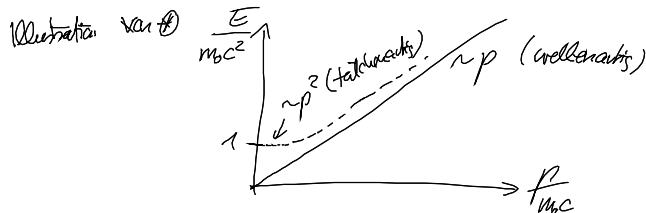
bei Vernachlässigung des 2. Terms unter der Wurzel

Abhängigkeit linear in  $\omega$

wie bei Lichtwellen!

(anstatt quadratisch  
wie im nicht-relativist.  
Fall)

Man kann sagen: Die relativist. Energie-Impulsbeziehung (und damit auch die Dispersionrelation) interpoliert zwischen 2 Fällen: nicht-relativist. Teilchen und Lichtwellen



$m_0 c^2$ : "Ruheenergie"

$m_0 c$ : "Ruheimpuls"

Frage:

Führt aus der Anwendung der Kommutatorregeln auf die relativist. Energie-Impuls-Relation wieder eine Bewegungsgleichung für den quantenmechan. Zustand (so wie bei der Heisenberg-Feldtheorie der Streutheorie) ?