

Wk: Ladungsinterpretation der KG-Gleichung

aus Kontinuitätsgleichung:
$$g(\underline{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\underbrace{\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\psi} - \underbrace{\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}}_{\psi^*} \right)$$

Vom negativ!

im Vergleich:
 SG-Theorie (nicht-relativistisch)

$$g(\underline{r}, t) = \psi^*(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t) = |\psi|^2 \geq 0$$

Multiplikation mit Elementarladung e_0

Ladungsdichte:
$$\rho'(\underline{r}, t) = e_0 g(\underline{r}, t) = \frac{i\hbar e_0}{2m_0 c^2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*)$$

Ladungsstromdichte:
$$\underline{j}'(\underline{r}, t) = \frac{\hbar e_0}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Bsp: Freies Teilchen,
$$\psi_{\pm}(\underline{r}, t) = A_{\pm} e^{i\frac{1}{\hbar}(\underline{p} \cdot \underline{r} \mp Et)}$$
, $E = \pm \sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

ebene Welle ($\underline{p} = \hbar \underline{k}$, $E = \hbar \omega$)

Vorbereitung mit Def. von $\rho'(\underline{r}, t)$

es ergibt sich:
$$\rho'_{\pm}(\underline{r}, t) = \pm \frac{e_0 E}{m_0 c^2} \underbrace{\psi_{\pm}^*(\underline{r}, t) \psi_{\pm}(\underline{r}, t)}_{\text{Betragquadrat}} \geq 0$$

positiv,
 Ladungsdichte kann auch negativ werden!

Interpretation: ψ_+ : Teilchen mit Ladung e_0

ψ_- : Teilchen mit Ladung $-e_0$

\Rightarrow Hinweis auf ein Teilchen - Antiteilchen - Paar!

g) Nichtrelativistischer Grenzfall der KG-Gleichung für freie Teilchen

Klass. E-Dynamik

$$\underline{g}(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

Ansatz:
$$\psi(\underline{r}, t) = \underbrace{\varphi(\underline{r}, t)}_{\text{mit } \varphi(\underline{r}, t) = \varphi_0 e^{i\underline{k} \cdot \underline{r} - i\frac{1}{\hbar} E' t}} e^{-i\frac{1}{\hbar} m_0 c^2 t} \sim e^{i\underline{k} \cdot \underline{r} - i\frac{1}{\hbar} E t}$$

ebene Welle

und $E' = E - m_0 c^2$

Idee dahinter:

Im Ansatz für ψ wird also ein Zerfall mit der Ruheenergie $m_0 c^2$ abgepalten.

Grund: Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Ruheenergie die dominante Energie im System.

$$E_{\text{kin}}^{\text{rel}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{klass. nicht-relativ. Teil}} + \mathcal{O}(v^4)$$

$$\Rightarrow E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$$

Zurück zu $\textcircled{*}$

Da $E' \ll m_0 c^2$, können wir annehmen, dass $\psi(x, t)$ nur langsam variiert ist mit der Zeit (im Vergleich zum Fall, der die Ruheenergie enthält!)

(betrachte dazu 1. Zeitabhängigkeit:

$$i \hbar \dot{\psi} = E' \psi \ll m_0 c^2 \psi$$

Verbinde diesen Ansatz $\textcircled{*}$ mit der KG-Gleichung

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \left(\Delta - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

Einsatz von $\textcircled{*}$, betrachte dazu zunächst die 2. Zeitabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\varphi(\mathbf{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \varphi \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\dot{\varphi} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right) \\
&= \ddot{\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \dot{\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \dot{\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\
&= \left(\ddot{\varphi} - \frac{2i m_0 c^2}{\hbar} \dot{\varphi} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}
\end{aligned}$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall kann $\dot{\varphi}$ vernachlässigt werden (da $E^1 = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$)

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \left(-\frac{i}{\hbar} 2m_0 c^2 \dot{\varphi} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\
= \left(\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}
\end{aligned}$$

Dividiere auf beiden Seiten durch $e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$ und
beachte Aufhebung der Terme $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi$ auf beide Seiten

$$\Rightarrow -\frac{i}{\hbar} 2m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi \Leftrightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi}$$

Schwingungsgleichung für ein freies Teilchen (nicht-relativistisch!)

UG-Theorie ist konsistent mit SG im nicht-relativist. Grenzfall

h) Anknüpfung an das elektromagnetische Feld

Erwähnung:

i) Klass. Elektrodynamik:

$$\underline{B}^{(rot)} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t) \quad \text{Vektorpotential}$$

magnet. Induktion

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla \phi(\underline{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

elekt. Feld

Skalarpotential

physikalische Messgrößen
(bevor. Bedräge daran)

\underline{E} und \underline{B} ändern sich nicht unter der Eichtransformation:

Coulombkraft

$$\underline{F} = q \left(\underline{E} + \frac{\underline{v}}{c} \times \underline{B} \right)$$

invariant unter Eichtransformation!

$$\underline{A} \rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \varphi$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

beliebige
Skalarfunkt.
 $\varphi(\underline{r}, t)$

ii) Anknüpfung Teilchen - Feld in der Klassischen Mechanik

freies Teilchen

ohne Feld

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad \text{Hamiltonfunktion}$$

geladenes Teilchen

im elektromagnet. Feld

$$H = \frac{\left(p - \frac{q}{c} \underline{A} \right)^2}{2m} + q \phi$$

führt auf Bewegungsgleichung mit Coulombkraft

iii) Anknüpfung in der nicht-relativist. Quantenmechanik

Korrespondenz-Prinzip: $H \rightarrow \hat{H}$, $\underline{A} \rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t)$
 $\phi \rightarrow \phi(\underline{r}, t)$

⇒ Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{(\hat{p} - q/c \underline{A})^2}{2m} + q\phi \right) \psi$$

$$\Leftrightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q/c \underline{A})^2 \psi$$

Man erkennt:

im Vergleich zum SG des Teilchens ohne elektromagnet. Feld ($i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi$)
wird offensichtlich ersetzt:

$$\hat{p} \longrightarrow \hat{p} - q/c \underline{A}(\underline{r}, t) \xrightarrow{\text{Ortsdarstellung}} \frac{\hbar}{i} \nabla - q/c \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\underline{r}, t) \xrightarrow{\text{Ortsdarstellung}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\underline{r}, t)$$

Gehe nun völlig über in relativistischen Fall:

vorne: $(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \psi = E^2 \psi$ mit $E^2 = \hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$
 $\hat{p}^2 \rightarrow \Delta$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right)^2 \psi^{(rel)} = \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q/c \underline{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 \right] \psi(\underline{r}, t)} \quad (**)$$

KG-Gleichung mit elektromagnet. Feld

Umschreibung in Vierernotation

ohne elektromagnet. Feld $\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$ mit $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\Leftrightarrow \left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

mit elektromagnet. Feld:

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \quad \text{mit } A^\mu = (\Phi, \underline{A})$$

skalares Potential
Vektorpot. (Vektorpotential)

durch:

$$\left(\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \right) \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar c} \Phi \right)^2 - \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \underline{A} \right)^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

zeitliche Komponente quadratisch räuml. Komponente quadratisch

$\hat{=}$ ~~***~~ ✓

Beispiel:

KG-Gleichung für geladenes relativ. Teilchen im Coulombpotential ($\underline{A}=0$)
 \rightarrow 2. Ansatz $\phi \sim -\frac{1}{r}$

I.2. Dirac-Gleichung

Warum noch eine weitere Gleichung für den relativ. Fall

- KG-Gl. ist Differentialgl. 2. Ordnung in der Zeit (und im Raum)
 \rightarrow man benötigt Anfangsbedingungen für $\psi(t=0)$ und $\dot{\psi}(t=0)$
 \rightarrow "Dichte" aus der Kontinuitätsgleichung kann negativ werden!
- KG-Gl. enthält keinen Spin (bzw. Spin kann nicht angekoppelt werden wie in SG-Theorie)
 formal: Beschränkung auf $S=0$

Suche nun eine Diff. Gleichung erster Ordnung in der Zeit, die ausserdem Teilchen mit $s = \frac{1}{2}$ (Elektronen) beschreiben kann!

Fordere ausserdem Lorentz-invarianz (d.h. die neue Gl. soll weder in allen Inertialsysteme gelten!)

→ Die Gleichung muss auch erster Ordnung im Raum sein (damit die formale Symmetrie zw. Ort und Zeit gewährleistet ist!)

Fordere schliesslich Konsistenz mit der relativist. Energie-Impuls-Relation:

Ansatz (für freie Teilchen)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi$$

↳ Dirac-Operator

$$\text{mit } \hat{H}_D = c \hat{\alpha}^i \underbrace{\hat{p}_i}_{\hat{p}_i} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

\vec{i} : Kartesische Indizes
 $i = 1, 2, 3$