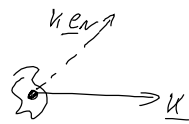


Lippmann-Schwinger (LS) - Gleichung:

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{\pm i\underline{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$$

Grenzfall $r \gg r'$ (weit weg vom Streuzentrum)

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + \frac{e^{\pm i\underline{k} \cdot \underline{r}}}{r} \left(-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{\mp i\underline{k} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}') \right)$$



$f^{(\pm)}(k_{\text{er}}, \underline{k})$

asymptotisch exakt

⇒ explizite Ausdrücke für die Streuamplitude ("+" entspricht physikalische Lösung)

Bem:

Wir können die Streuamplitude auch formal als Matrixelement von \hat{V} schreiben

$$f^{(\pm)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \underbrace{\langle k_{\text{er}} |}_{\text{Dane Welle mit Ausbreitungsrichtung } \underline{e}_z} \hat{V} | \psi_{\underline{k}}^{(\pm)} \rangle_{\text{Streuzustand}}$$

Operator zum Streupotential \hat{V}

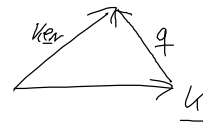
Problem: $f^{(\pm)}$ hängt noch vom vollen Streuzustand ab (i.a. nicht bekannt)

Born'sche Näherung

Ersetze im Integral in $f^{(\pm)}$ den exakten Streuzustand $\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}$ durch den ungestörten Zustand, d.h. die ebene Welle (Folien auf die "+" - Lösung)

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{\text{Born}}^{(\pm)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{-i\underline{k}_{\text{er}} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}'} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \end{aligned}$$

mit $q = k_{\text{er}} - k'$



$$\Rightarrow f_{\text{Born}}^+ (k_{\text{er}}, k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(q)$$

⊕

Fouriertransformierte des Streupotentials!
(q : „Impulsübertrag“)

expliziten Zusammenhang Streupotential \leftrightarrow Streupotential!

Diskussion

• Annahme von ⊕ für kugelsymmetr. Potential $V(r) = V(r')$

$$\begin{aligned} f_{\text{Born}}^+ (k_{\text{er}}, k) &= f_{\text{Born}}^+ (q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dr' (r')^2 V(r') \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{-iqr' \cos\theta} \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin(qr') \end{aligned}$$

Strukturformel

bedeutet: $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow f_{\text{Born}}^+ (q) = f_{\text{Born}}^+ (q) = f_{\text{Born}}^+ (r)$$

k bleibt konstant
(elastische Streuung!)

• Zur Gültigkeit der Born'schen Näherung

$$\text{Erinnerung: volle LS-gl. : } \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(r) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{i\underline{k} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$$

Wir haben in Rahmen der Born'schen Näherung ersetzt: $\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}') \rightarrow e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}'} = \psi_{\underline{k}}^{(0)}(\underline{r}')$
(und $r \gg r'$) (siehe Form in ⊕)

Also: Born'sche Näherung entspricht der "1. Iteration" der LS-Gleichung!

Damit das Sinn macht, sollte gelten

$$\left| -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{r'} \frac{e^{iK(r-r')} V(r') e^{iK r'}}{|r-r'|} \right| \ll |\psi_K^{(0)}(r)| = 1$$

(d.h. 2. Term klein gegen 1. Term)

⇒ Bedingung für Gültigkeit der Born'schen Näherung!

Auswertung für kugelsymmetrisches Potential

und setze $l=0$ (Begründung: Die Bedingung oben soll für alle l erfüllt sein, bei $l=0$ ist das Streupotential am größten!)

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int_{r'} \frac{1}{r'} e^{iK r' + iK r' \cos\theta} V(r') \right| \ll 1$$

Kugelkoordinaten

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \frac{2\pi}{iK} \int_0^\infty dr' V(r') \frac{e^{iK r'} - e^{-iK r'}}{(e^{2iK r'} - 1)} \right| \ll 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^\infty dr' V(r') (e^{2iK r'} - 1) \right| \ll \frac{\hbar^2 K}{m}$$

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

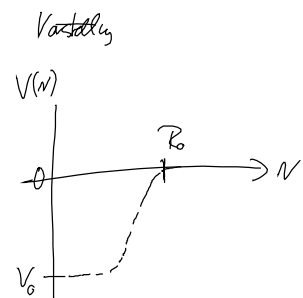
Betrachte 2 Fälle (ausführliche Diskussion: s. Notiz)

a) Hohe Energien

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ groß}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dr' V(r') \frac{e^{2iK r'}}{\cos(2K r') + i \sin(2K r')} \approx 0$$

sehr schnell oszillierend!
(für K sehr groß)



r_0 : Ausdehnung des Streupotentials

An dieser Bedingung wird:

$$\left| \int_0^{\infty} dr' V(r') \right| \ll \frac{\hbar^2 k}{m}$$

Raumintegral über $V(r')$
 $\approx V_0 R_0$

$$V_0 R_0 \ll \frac{\hbar^2 k}{m} \quad \text{erfüllt falls } V_0 \text{ klein und/oder } R_0 \text{ klein}$$

b) Wenig Energie

erweiterte Exponentialfunktion

$$e^{-z i k r'} \approx 1 - z i k r'$$

Einsetzen $\Rightarrow \left| z k \int_0^{\infty} dr' r' V(r') \right| \ll \frac{\hbar^2 k}{m}$

$$\left| \int_0^{\infty} dr' r' V(r') \right| \ll \frac{\hbar^2}{2m}$$

Sehr einschränkende Bedingung!

Fazit: Born'sche Näherung funktioniert am besten im Falle ^{kleiner} Energie
 (und schwaches Streupotential)

III.4. Formale Streutheorie und Green'sche Funktionen

Wir führen eine Verallgemeinerung der Green'schen Funktion $\hat{G}_0(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}$ zum freien Hamiltonian \hat{H}_0 ein:

$$\boxed{\hat{G}(z) = (z - \hat{H})^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}}$$

\hat{H} voller Hamiltonoperator
 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$

Hier wurde E gleich durch die komplexe Zahl $z = E \pm i\epsilon$ ersetzt

Umformen von $\hat{G}(z)$ ~~als~~ durch geometrische Reihe

$$\boxed{\hat{G}_0(z) = \frac{1}{z - \hat{H}_0}}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= (z - \hat{H})^{-1} = (z - \hat{H}_0 - \hat{V})^{-1} = \left((\hat{G}_0(z))^{-1} - \hat{V} \right)^{-1} \\ &= \left(\hat{G}_0(z)^{-1} [\hat{1} - \hat{G}_0(z) \hat{V}] \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}}$$

$$\hat{G}(z) = (\hat{1} - \hat{G}_0(z) \hat{V})^{-1} \hat{G}_0(z)$$

benutze $\sum_{k=0}^{\infty} q^k a_0 = \frac{a_0}{1-q}$ für $|q| < 1$

hier: $a_0 \rightarrow \hat{G}_0(z)$
 $q \rightarrow \hat{G}_0(z) \hat{V}$

$$\Rightarrow \hat{G}(z) \stackrel{\circledast}{=} \underbrace{\hat{G}_0(z)}_{k=0} + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V}}_{k=1} \underbrace{\hat{G}_0(z)}_{a_0} + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V}}_{k=2} \underbrace{\hat{G}_0(z)}_{a_0} + \dots$$

$$= \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \left(\hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \dots \right)$$

das ist wieder $\hat{G}(z)$!

Also:

$$\boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z)}$$

"Dyson-Gleichung"

Formal exakt!

(hier für ein Einheitsmatrixproblem, denn \hat{V} ist strengspektral für \uparrow Teilchen!)

Die Dyson-Gl. spielt auch zentrale Rolle für wechselwirkende Vielteilchensysteme

Alternativ können wir \otimes auch wie folgt ~~schreiben~~ schreiben:

(lasse Argumente weg)

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \dots$$

$$= \hat{G}_0 + \hat{G}_0 (\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots) \hat{G}_0$$

Definiere

$$\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots$$

Streuspektral

"T-Matrix"

$$= \hat{V} + \underbrace{(\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} + \dots)}_{\text{das ist wieder die T-Matrix!}} \hat{G}_0 \hat{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{T}(z) \hat{G}_0(z) \hat{V}}$$

(implizit!)

gelöste Gleichung für die T-Matrix

Kombination der Ausdrücke für $\hat{G}(z)$ und $\hat{T}(z)$
(in der Form \otimes)

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{T}(z) \hat{G}_0(z)$$

Durch Kenntnis der T -Matrix kann man sofort die volle Green'sche Funktion berechnen!

Umkehrung der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$\begin{aligned} |\psi_K^{(\pm)}\rangle &= |K\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} |\psi_K^{(\pm)}\rangle && \text{Dyson-Schwinger-} \\ & && \text{(Klein'sche Darstellung)} \\ &= |K\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} (|K\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} |K\rangle + \dots) && \text{Iteration} \\ &= |K\rangle + (\hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} + \dots) |K\rangle \end{aligned}$$

$$|\psi_K^{(\pm)}\rangle = |K\rangle + (\hat{G}_0^{(\pm)} + \hat{G}_0^{(\pm)} \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)} + \dots) \hat{V} |K\rangle$$

Das entspricht der
Rechenartikulation der vollen
Green'schen Funktion $\hat{G}^{\pm}(z) = (E \pm i\epsilon - \hat{H})^{-1}$
(basiert auf Dyson-Gl.)

$$\Rightarrow |\psi_K^{(\pm)}\rangle = |K\rangle + \hat{G}^{\pm}(z) \hat{V} |K\rangle$$

explizit gleich
für $|\psi_K^{(\pm)}\rangle$!

Bei Kenntnis der vollen Green'schen Funktion kann also der
Stromzustand sofort berechnet werden!

offensichtl.
Näherung: Nimm zu Beginn von \hat{G} nur die ersten Iteration
aus der Dyson-Gl.

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0$$

"Abbruch an
geeigneter Stelle ..."

multidimensionale Integrale

Auch die Streuamplitude läßt sich jetzt neu darstellen

bisher (~~vor~~ Bornsche Näherung)

$$f^{(\pm)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle k_{\text{ein}} | \hat{V} | \psi_{\underline{k}}^{(\pm)} \rangle$$

voller Streuzustand!

Ersetze $|\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle$ durch \otimes

$$f^{(\pm)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle k_{\text{ein}} | \hat{V} \left(|k\rangle + \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} |k\rangle + \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} |k\rangle + \dots \right) |k\rangle$$

$$\left(\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} \hat{G}_0^{\pm} \hat{V} + \dots \right) |k\rangle$$

T-Matrix!

$$\Rightarrow \boxed{f^{(\pm)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle k_{\text{ein}} | \hat{T}^{\pm}(z) | k \rangle} \quad \text{Exakt!}$$

Vergleich mit Bornsche Näherung

$$\hat{T}^{\pm}(z) \rightarrow \hat{V}$$

(also dem "trivialen" Term in der vollen T-Matrix)