

### 4.1.1. Polarisation

Betrachte el. magn. Well

$$\begin{aligned} \underline{E}(r, t) &= \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \\ \underline{B}(r, t) &= \underline{B}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

Allgemein

$\underline{E}$  heißt transversal, falls  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$  (Quellenfrei)

$$\rightarrow i \underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \rightarrow \underline{E} \perp \underline{k}$$

$\underline{E}$  heißt longitudinal, falls  $\nabla \times \underline{E} = 0$  (Wirbelfrei)

$$\rightarrow i \underline{k} \times \underline{E} = 0$$

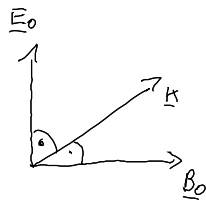
$$\hookrightarrow \underline{E} \parallel \underline{k}$$

für  $\rho = 0$  ist wegen  $\nabla \cdot \underline{E} = 0$   $\underline{E}(r, t)$  transversal  
 $\nabla \cdot \underline{B} = 0$   $\underline{B}(r, t)$  transversal.

Weiter folgt aus  $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

$$\hookrightarrow (i \underline{k} \times \underline{E}_0 - i \omega \underline{B}_0) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \underline{n} \times \underline{E}_0, \quad \omega = c |\underline{k}|, \quad \underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$



$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$  bilden ein Rechtssystem

Die Richtung von  $\text{Re} \{ \underline{E}_0, \underline{B}_0 \}$  legt Polarisation fest

Sei  $\underline{k} \parallel \underline{B}_0$  - Achse  $\rightarrow \underline{E}_0 = E_{0,1} \underline{e}_1 + E_{0,2} \underline{e}_2$

$$\text{mit } E_{0,i} = a_i e^{i \delta_i} \in \mathbb{C}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i, \delta_i \in \mathbb{R} \\ i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

Physikalisches Feld:

$$E_1(r, t) = \operatorname{Re} \left\{ a_1 e^{i\{\delta_1 + \kappa \cdot r - \omega t\}} \right\}$$

$$= a_1 \cos(\delta_1 + \kappa \cdot r - \omega t)$$

analog  $E_2 = a_2 \cos(\delta_2 + \underbrace{\kappa \cdot r - \omega t}_{\varphi})$

Aus  $\frac{E_1}{a_1} = \cos(\varphi) \cos(\delta_1) - \sin(\varphi) \sin(\delta_1)$  (Additionstheoreme)

$$\frac{E_2}{a_2} = \cos(\varphi) \cos(\delta_2) - \sin(\varphi) \sin(\delta_2)$$

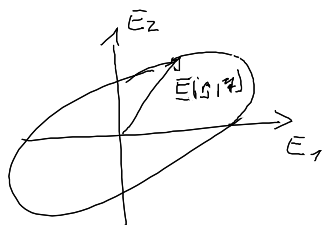
lässt sich  $\varphi = \kappa \cdot r - \omega t$  eliminieren

$$\frac{E_1}{a_1} \sin \delta_2 - \frac{E_2}{a_2} \sin \delta_1 = \cos(\varphi) \sin(\delta_2 - \delta_1) \quad (1)$$

$$\frac{E_1}{a_1} \cos \delta_2 - \frac{E_2}{a_2} \cos \delta_1 = \sin(\varphi) \sin(\delta_2 - \delta_1) \quad (2)$$

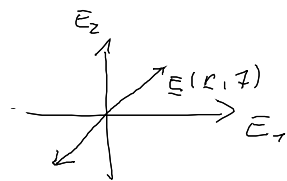
$$(1)^2 + (2)^2 \implies \left[ \left( \frac{E_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{a_2} \right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{a_1 a_2} \cos \delta \right] = \sin^2 \delta \quad (*)$$

Ellipsengleichung für  $E_1, E_2$



Der Feldvektor läuft als Funktion von  $\varphi$  auf einer Ellipse  $\perp \kappa$  um.  
(elliptische Polarisation)

Spezialfälle  
 (a) linear polarisierte Welle



$$\delta_1 = \delta_2 + n \cdot \pi$$

$$\delta = \delta_2 - \delta_1$$

$$\sin \delta = 0$$

$$\cos \delta = \pm 1$$

$$\text{in } \ominus \rightarrow \frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0$$

$$\rightarrow \underline{E}(r, t) = \underline{E}_0 \cos \varphi(r, t) \quad \text{mit } \underline{E}_0 \text{ reell}$$

(b) zirkular polarisierte Welle

$$\text{in } \oplus \rightarrow E_1^2 + E_2^2 = a^2$$

$$a_1 = a_2 = a$$

$$\delta_1 = \delta_2 + (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \cos \delta = 0$$

$\underline{E}$  läuft auf Kreis um

$$\underline{E}(r, t) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \pm \sin \varphi \end{pmatrix}$$

↗ links / rechts zirkular polarisiert

$\underline{B}$  läuft dem  $\underline{E}$ -vektor um  $\frac{\pi}{2}$  in der Polarisations Ebene verschoben nach.

Zusammenfassung:

Maxwellgl. im Vakuum

→  $\underline{E}, \underline{B}$  sind in Phase

→  $\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$  bilden ein Rechtssystem

$$\underline{E}_0(r, t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

$$\underline{B}_0(r, t) = \underline{B}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

4.1.2 Energiedichte & Energiestromdichte der eb. magnet. Welle

$$\text{Energiedichte } w = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2$$

$$= 2 \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}_0^2$$

$$w = \epsilon_0 \underline{E}_0^2$$

$$\underline{B}_0 = \frac{1}{c} (\underline{n} \times \underline{E}_0)$$

Energiestromdichte  
(Poynting Vektor)

$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{E} \times \underline{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \underline{E} \times (\underline{n} \times \underline{E})$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \underline{E}^2 \underline{n}$$

$$= c \epsilon_0 \underline{E}^2 \underline{n}$$

$$\underline{S} = c \cdot w \cdot \underline{n}$$

↑  $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$

Die Energie wird mit Lichtgeschwindigkeit  $|\underline{k}| \cdot c$   
in Richtung  $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$  transportiert

Kugelwelle

$$\underline{E}(r, t) = \frac{1}{r} \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$



Kugelschale mit Radius  $r$   
Dicke  $dr$

Energie in Kugelschale

$$\begin{aligned}
 W(r) &= 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \cdot \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \\
 &= 4 \pi r^2 dr \epsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{Raum-zeitliche} \\ \text{mittel} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{E}^2 \\
 &= \text{const} \quad (\forall \text{ Radius } r)
 \end{aligned}$$

Bisher: Wellenausbreitung im Vakuum

Jetzt: Erzeugung durch zeitlich verändernde Strom- und Ladungsverteilungen

## 4.2. Retardierte Potentiale

Aufgabe: Lösungen der inhomogenen Gleichungen

$$\begin{array}{l}
 \square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\
 \square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}
 \end{array}
 \quad (\text{Lorentz-Bedingung})$$

vorgegebene Quellen  $\rho(\underline{r}, t)$ ,  $\underline{j}(\underline{r}, t)$  und  
Randbedingungen  $\phi, \underline{A} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

Methode Greensche Funktion  $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

$$\square u(\underline{r}, t) = -f(\underline{r}, t)$$

geg.  $f = \text{Inhomogenität}$

$$= \int \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3r'$$

$$\text{ges } u = \int \phi$$

$$u(\underline{r}, t) \stackrel{?}{=} \int \mathcal{G} \cdot f(\underline{r}, t)$$

↕↕  
Rücktrafo

$$u(\underline{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}(\underline{r}-\underline{r}', t-t') f(\underline{r}', t')$$

Vergleiche in E-Statik:

$$\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\phi}(\underline{r}) \stackrel{?}{=} \int \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\rho} \quad , \quad \vec{\mathcal{G}} \stackrel{?}{=} \frac{\vec{r}}{\epsilon_0 r^3}$$

$$\phi(\underline{r}) \stackrel{?}{=} \int d^3r' \mathcal{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

$$\text{mit } \mathcal{G}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

mit

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\epsilon_0}$$

• Kausalitätsbedingung:

$$\mathcal{G}(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für}$$

$$\vec{r}' > \vec{r}$$