

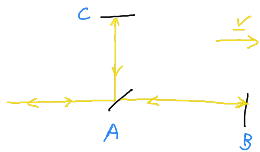
6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

6.1. Lorentz-Transformation in der speziellen Relativitätstheorie

Michelson-Morley-Experiment (1887)

Prüfung der Äther-Hypothese

(Erde bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem „Medium“ in dem sich das Licht mit c relativ zum Medium ausbreitet)

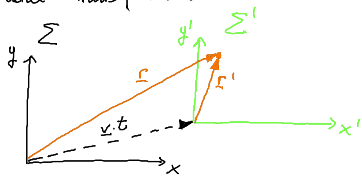


$$t_{ABA} - t_{ACA} \sim 10^{-8} t_{ABA}$$

nicht beobachtet!

Erg. Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

Bisher: Galilei Transformation



Lichtblitz: breitet sich vom Ursprung Σ mit Geschw. c aus: $r = ct$

$$\text{in } \Sigma': \quad \underline{r}(t) = \underline{r}' + \underline{v}t$$

$$c^2 t^2 = r^2 = (\underline{r}' + \underline{v}t)^2 = r'^2 + 2\underline{r}' \cdot \underline{v}t + v^2 t^2$$

$$r'^2 = (c^2 - v^2)t^2 - 2\underline{r}' \cdot \underline{v}t \neq c^2 t^2 \quad \text{für } |\underline{v}| \neq 0$$

↓ zum Michelson Morley-Exp.!

⇒ Konzept der absoluten Zeit aufgeben → spez. Relativitätstheorie

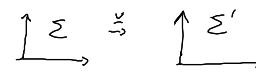
NB: Aufgabe des Konzeptes des absoluten Raumes → allg. Relativitätstheorie

Postulat der spez. Relativitätstheorie

(Einstein 1905) „zur Elektrodynamik bewegter Körper“

- Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip)
- Konsequenz: Galilei-Prinzip verwerfen!
 - klass. Mechanik ist abzulehnen, da sie Galilei-invariant ist (muss im Limit relativ v wieder gelten)
 - EL-dynamik hat schon die gewünschte Invarianz (Lorentz-invariant)

Aufgabe: Suche Trafo $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ die folgende Forderungen erfüllt:

- (i) Lineare Trafo $(x, t) \rightarrow (x', t')$ 
- (ii) Jeder Pkt $\Gamma'(t) = \text{konst}$ (ruhend in Σ') bewegt sich mit v in Σ . (und umgekehrt)
- (iii) Die Lichtgeschw. c ist in beiden Systemen gleich.
- (iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$\begin{aligned} \Sigma \rightarrow \Sigma' &= f(x, t; v) & \text{Umkehrtrafo} & \quad \Sigma' \rightarrow \Sigma = f(x', t'; -v) \\ t \rightarrow t' &= g(x, t; v) & & \quad t' \rightarrow t = g(x', t'; -v) \end{aligned}$$

- oBd A:
- v in x -Richtung
 - $(x=0, t=0) \rightarrow (x'=0, t'=0)$
 - $y=y', z=z'$
 - σ' bewegt sich nach $x=vt$

Ansatz: $x \rightarrow x' = \gamma(x - vt)$ (1) wegen (ii), (i)
 $x' \rightarrow x = \gamma(x' + vt')$ (2) wegen (iv)

Invarianz der Lichtgeschw. (iii): $x = ct \rightarrow x' = ct'$ (3)

$$\begin{aligned} \text{(3) in (1):} & \quad ct \rightarrow ct' = \gamma(c - v)t \\ \text{in (2):} & \quad ct = \gamma(c + v)t' \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \stackrel{(i)}{=} c^2 t t' = \gamma^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta := \frac{v}{c}$$

Für $v=0$: $\gamma \stackrel{!}{=} 1$ (Galilei Trafo im Limit $v \rightarrow 0$)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

Also:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

elim. x : $\Rightarrow x' \sqrt{1 - \beta^2} = x - vt = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - vt$

$$\begin{aligned} vt &= \sqrt{1 - \beta^2} \left(-x' + \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} \left(\frac{-x' + x'/\beta^2 + x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &= \frac{x'/\beta^2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

$$t = \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

analog $t' = \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Ergebnis: Lorentz-Transform

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransformiert! Keine absolute Zeit!

Forderung: $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$; somit imaginäre d.h. unphysikalische Werte.

$$|v| < c$$

Entwicklung für $|v| \ll c$, $\beta \ll 1 \rightarrow \mu \rightarrow 1 \rightarrow \begin{cases} x' - vt = x \\ t' = t \end{cases}$
Galilei-Transform

nichtrelativistische Mechanik gültig.

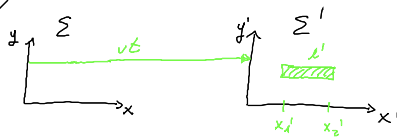
Eigenschaften der Lorentz-Transform:

a) Lorentz - Invarianten

$$\begin{aligned} \boxed{x'^2 - c^2 t'^2} &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \\ &\stackrel{\text{Lorentz Transform}}{\rightarrow} \mu^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 - \mu^2 c^2 (t^2 - \frac{2xvt}{c^2} + \frac{x^2 v^2}{c^4}) \\ &= \frac{x^2 + v^2 t^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2 t^2 + x^2 \beta^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \\ &= \frac{(x^2 - c^2 t^2)(1-\beta^2)}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 = \boxed{x^2 - c^2 t^2} \end{aligned}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c
(Lichtblitz in $\sigma = \sigma'$) sind invariant.

b) Lorentz - Kontraktion



$$\begin{aligned} \text{Länge in } \Sigma' : l' &= x_2' - x_1' \quad (\text{Ruhlänge in } \Sigma') \\ \text{Länge in } \Sigma : l &= x_2 - x_1 \\ &= \frac{1}{\mu} (x_2' - x_1') = \frac{1}{\mu} l' \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} l' < l' \end{aligned}$$

z.B. $v/c = 0,75 = \mu \approx 1,5$
 $\frac{1}{\mu} \approx \frac{2}{3}$

Visualisierung: www.tempolimit-Lichtgeschwindigkeit.de / [tuebingen / tuebingen.ltuw.c](http://tuebingen.tuebingen.ltuw.c)

6.2. Vierervektoren und Minkowski-Raum

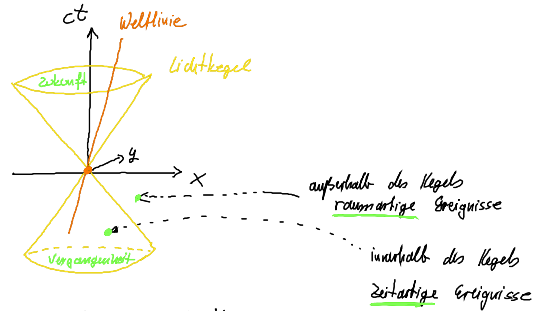
Geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x, y, z, t) im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum):

Die Lorentz-Transformation lässt $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ invariant.

Lichtkegel: $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$

Die Bewegung eines Massenpunktes ergibt Minkowski-Raum (ct, x, y, z) eine Weltlinie.

Bei konst. Geschw. $x = \beta ct$ gerade (wegen $\beta < 1$ innerhalb des Lichtkegels)



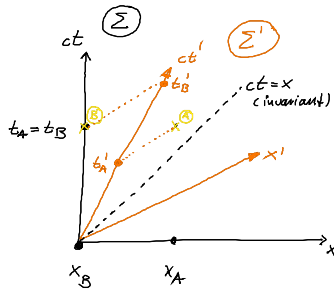
Gleichzeitigkeit

Ereignisse A, B an Orten x_A, x_B seien gleichzeitig in Σ .

Im Lorentz-transformierten Inertialsystem sind sie nicht mehr gleichzeitig.

$$x'_A - \text{Adse: } t' = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\beta} ct \rightarrow ct = \beta x < x$$

$$x'_B - \text{Adse: } x' = 0 \rightarrow x = \beta ct \rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x > x$$



Kausalität

Reihenfolge zweier Ereignisse an Orten x_1, x_2 in Σ : $t_1 < t_2$

Reihenfolge in Σ' :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right] > 0 \text{ falls } c(t_2 - t_1) > \beta(x_2 - x_1)$$

$$\text{Lorentz-Transform} < 0 \text{ falls } <$$

Für raumartige Ereignisse $c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1)$ lässt sich eine Lorentz-Transformation finden, so dass beide Ereignisse gleichzeitig sind. $(\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1})$ oder die Reihenfolge sogar umgedreht wird. $(\beta > \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1})$ für alle $(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^1$.

Aber: Nur zeitartige Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v \leq c$ möglich ist, denn Reihenfolge wird nicht geändert, also kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.