

6.4. Maxwell - Gleichungen

6.4.1. Homogene Maxwell - Gl.

$$(1) \nabla \cdot \underline{B} = 0 = \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$

mit $\partial_1 = -\partial^1, \dots, F^{32} = -F^{23}, \dots$ folgt
total antisymm. Tensor

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

zykl. (123)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 - E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 \\ E^2 & cB^3 & 0 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi^{\nu} = (\phi, cA)$$

$$j^{\mu} = (c\rho, \underline{j})$$

$$(2) \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

1. Komponente $\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_t B^1 = 0$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} + \partial_0 F^{32} = 0$$

$$\partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0$$

$\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix}$

mit $\partial_0 = \partial^0, \partial_2 = -\partial^2, \partial_3 = -\partial^3$
 $F^{32} = -F^{23} \dots$

zykl. (023)

analog ergeben die anderen Komponenten

$$\partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = 0$$

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0$$

zykl. (013)

zykl. (012)

Zusammenfassung der homog. Maxwell - Gleichungen

$$\Rightarrow \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial^\nu F^{\lambda\kappa} = 0$$

oder

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0$$

"4 - Rotation"



$$\text{mit } \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (\mu\nu\lambda\kappa) = \text{gerade Permutation} \\ -1 & \text{wenn } (\mu\nu\lambda\kappa) = \text{ungerade} \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4-dim Levi-Civita - Tensor

(analog zum 3-dim. : $\epsilon_{ijk} \partial^k a^i = (\nabla \times \underline{a})_j$)

Bemerkung: (i) $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist vollständig antisymmetrisch

$$(ii) \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = U^\mu_\tau U^\nu_\rho U^\lambda_\sigma U^\kappa_\zeta \epsilon^{\tau\rho\sigma\zeta}$$

$$\begin{pmatrix} u^\mu_0 & u^\mu_1 & u^\mu_2 & u^\mu_3 \\ u^\nu_0 & u^\nu_1 & u^\nu_2 & u^\nu_3 \\ u^\lambda_0 & u^\lambda_1 & u^\lambda_2 & u^\lambda_3 \\ u^\kappa_0 & u^\kappa_1 & u^\kappa_2 & u^\kappa_3 \end{pmatrix} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$$

Lineare Transformation

Damit $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist, muss reinvert werden dass

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \underbrace{(\det U)}_{\pm 1} U^\mu{}_\pi U^\nu{}_\sigma U^\lambda{}_\delta U^\kappa{}_\tau \epsilon^{\pi\sigma\delta\tau}$$

$\Rightarrow \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ ist ein Pseudotensor.

Verallgemeinerung des 3-dim Falles ϵ^{ikl} mit $(\nabla \times \mathbf{a})_i = \epsilon^{ikl} \partial_k a_l$.
↑
Pseudotensor

6.4.2. Inhomogene Maxwell-Gl. (im Vakuum)

(3) $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$

$$\begin{aligned} \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \frac{1}{\epsilon_0 c} \rho \\ \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0} \quad , \text{ da } \partial_0 F^{00} = 0$$

$\mu=0,1,2,3$

(4) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$

1. Komponente:

$$\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1$$

mit $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$:

$$\partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1} \quad , \text{ da } \partial_1 F^{11} = 0$$

Zusammengefasst: Inhomog. Maxwell-Gl.:

analog für 2. und 3. Komponente.

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu} \quad (\text{"4-Divergenz"})$$

Bemerkung:

(i) Die inhomogenen Maxwell-Gl. sind durch Potenzialansatz $F_{\lambda\kappa} = \partial_\lambda \phi_\kappa - \partial_\kappa \phi_\lambda$ \otimes automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa}_{=0} - \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\kappa \phi_\lambda}_{=0}$$

ϵ ist total antisymmetrisch.

($\nu \leftrightarrow \lambda$)

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa = -\epsilon^{\mu\lambda\nu\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa$$

(da in $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa$ über alle Perm. summiert wird)

$$\Downarrow = 0$$

$$= 0$$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-Gl. sollte die Wellengleichung für die Potentiale folgen.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu = \partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu$$

mit Lorenz-Eichung $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ folgt

$$\partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu = \partial^\nu \partial_\mu \phi^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu}$$

inhomogene Wellengleichung $\begin{cases} \square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square A = -\mu_0 j \end{cases}$

(iii) Die Maxwell-Gleichungen

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$$

sind Lorentz-Invariant, weil sie durch 4-er Vektoren ausgedrückt werden können.

Bsp. Feld einer gleichförmig bewegten Ladungsverteilung



Strom und Felder in Σ' :

- 4-er Strom in Σ' $j'^{\mu} = \begin{cases} c \rho_0(r') & \mu=0 \\ 0 & \mu=1,2,3 \end{cases}$
- Potenzial in Σ' $\phi'(r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_0(r'')}{|r' - r''|} d^3r''$, $A'(r',t) = 0$
 $\phi'^{\mu}(r',t) = \begin{pmatrix} \phi'(r') \\ c A'(r',t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'(r') \\ 0 \end{pmatrix}$

Eichung? $\partial'_\mu \phi'^{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \nabla' \right) \begin{pmatrix} \phi'(r') \\ c A'(r',t) \end{pmatrix} = 0$

\Rightarrow Lorenz-Eichung

• Felder in Σ'

$$\underline{E}'(r',t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_0(r'') (r' - r'')}{|r' - r''|^3} d^3r''$$

, $\underline{B}'(r',t) = 0$

Strom & Felder im Laborsystem Σ :

• $j^\lambda = U^{-1\lambda}{}_\mu j'^{\mu}$
 $= U_\mu{}^\lambda j'^{\mu}$

(Rücktransform)

$$U_\mu{}^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{ohne } \gamma \text{ \& } \text{Komp.})$$

$$\begin{pmatrix} c j^0 \\ j^x \end{pmatrix} = j^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \rho_0(r') \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c j^0(r,t) = \gamma c \rho_0(r') & \textcircled{1} \\ j^x(r,t) = \beta\gamma c \rho_0(r') & \textcircled{2} \end{cases}$$

Transformation der Koordinaten

$$x'^{\lambda} = U^{\lambda}_{\mu} x^{\mu} \quad (\text{Hint-Trafo})$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \rho(\underline{r}, t) = \gamma \rho_0(\gamma(x-ut), y, z)$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{v} \cdot \rho(\underline{r}, t)$$

↘ Ladungsverteilung verleiht in Σ in x gestaucht

Ladungserhaltung erfüllt?

$$\int_{\Sigma'} \rho_0(\underline{r}') d^3r' = \int_{\Sigma} \rho(\underline{r}, t) d^3r$$

$$\uparrow \text{ in } \Sigma' \quad \uparrow \text{ in } \Sigma$$

$$= \gamma \int \rho_0(\gamma(x-ut), y, z) d^3r$$

ist erfüllt!

• Potentiale in Σ

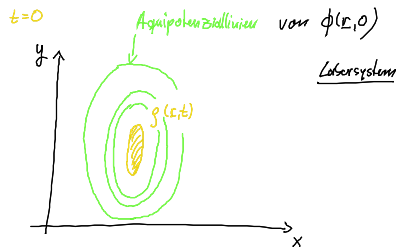
$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi(\underline{r}, t) \\ cA_x(\underline{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'(r') \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma \int \frac{\rho_0(r'')}{\sqrt{(\gamma x - \beta\gamma ct - x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2}} d^3r''$$

$$cA_x(\underline{r}, t) = \beta\phi(\underline{r}, t)$$

$$A_y = 0$$

$$A_z = 0$$

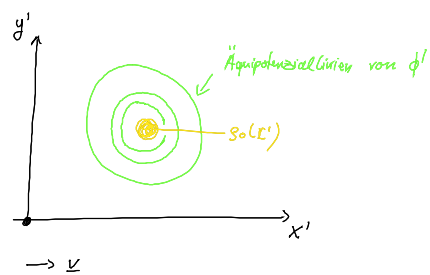


$$cA_x(\underline{r}, t) = \beta\phi(\underline{r}, t)$$

$$A_y = 0$$

$$A_z = 0$$

bewegtes Koordinatensystem



$$\underline{A}' = 0$$