Zusammenfassung 6.5 & 6.7

Die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_{TF}$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa} - \mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu$$

liefert über das Wirkungsprinzip ($\delta W = 0$) die Maxwell-Gleichungen

- homogene Maxwell. Gl. durch Variation der Bahn δx^μ bei festem Feld (festem Potenzial)

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0$$

- inhomogene Maxwell. Gl. durch Variation der Felder $\delta \phi^\nu$ bei festen Bahnen

$$\partial_\nu F^{\nu\kappa} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\nu$$

Feldstärketensor $\left[F^{\kappa\nu} = \partial^\kappa \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\kappa \right]$

Bem: • $\mathcal{L}_F = \frac{1}{2c} \left(\underline{E} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{H} \right)$ $\qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

Die Lagrangedichte eines freien EM Feldes gleicht der Differenz seiner elektrischen und magn. Energiebeiträge.

• $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\varrho\sigma} = -\frac{8}{c} \underline{E} \cdot \underline{B}$

- würde auch die Forderungen an Lagrange-Dichte erfüllen (liefert aber keinen Beitrag bei Variation)
- ist ein Lorentz-Skalar

↳ (i) $\underline{E}, \underline{B}$ $\perp$ in einem Inertialsystem
$\Rightarrow$ $\perp$ in allen Inertialsystemen
$\Rightarrow$ $\exists$ Inertialsystem in dem $\underline{E} = 0$ und eins in dem $\underline{B} = 0$.

7. Ausblick

7.1 Schrödingergleichung und Eichfelder

- aus Lagrangedichte kann über Legendre Trafo eine Hamiltondichte hergeleitet werden

Beispielhaft an Lagrangefunktion $L(x,\dot{x},t)$:

$$L(\underline{x},\underline{\dot{x}},t) = \underbrace{-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{L_T} \underbrace{-e\phi + e\underline{A}\cdot\underline{v}}_{L_{TF}}$$

$$L_T = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{m(v)} c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Generalisierte Impulse :

$$\underline{p}_{kan} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}}$$

$$= m(v)\,\underline{v} + e\underline{A}$$

$$(\underline{p}_{kan} - e\underline{A})^2 = (m(v)\,\underline{v})^2$$

Legendre Trafo:

$$H(\underline{x},\underline{p}_{kan},t) = \underset{\text{"neu"}}{\underline{p}_{kan}}\cdot\underset{\text{"alt"}}{\underline{v}} - L(\underline{x},\underline{\dot{x}},t)$$

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= m(v)\,\underline{v}^2 + \cancel{e\underline{A}\cdot\underline{v}} + m(v)\,c^2 + e\phi - \cancel{e\underline{A}\cdot\underline{v}} - m(v)\frac{v^2}{c^2}c^2$$

$$= m(v)\,c^2 + e\phi$$

Umformen um direkte Abh. von p_{kan} zu sehen

$$\frac{(H-e\phi)^2}{c^2} = m(v)^2c^2 = m_0^2c^2 + \frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2c^2 + m(v)^2v^2$$

$$m(v)^2v^2 = (\underline{p}_{kan}-e\underline{A})^2$$

$$H(x,p_{kan},t) = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2(\underline{p}_{kan}-e\underline{A})^2} + e\phi$$

nichtrel. Näherung
$|\underline{v}| \ll c$

$$\approx \boxed{m_0c^2 + \frac{1}{2m_0}(\underline{p}_{kan}-e\underline{A})^2 + e\phi = H(\underline{x},\underline{p}_{kan})}$$

(Hamiltonian der minimalen Kopplung)

Nächster Schritt: Korrespondenzprinzip $\underline{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla$ liefert Hamiltonoperator $\hat{H}$ für Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$

– Formale Eichtransformation (I–III) lässt SG mit Feld invariant :

$$\boxed{\psi(x,t) \to \psi(x,t)\,e^{i\frac{e}{\hbar}F(x,t)}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\underline{A}(x,t) \to \underline{A}(x,t) + \nabla F(x,t) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\phi(x,t) \to \phi(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}F(x,t) \qquad (\mathrm{III})$$

Bem: ① Invarianz bezgl. Phasenänderung liefert Ladungserhaltung

② Aus freiem Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ kann durch Forderung der Eichinvarianz (Gl.(I)) eine Bedingung an ∇ und $\frac{\partial}{\partial t}$ hergeleitet werden:

$$\nabla \rightarrow \nabla + f(x,t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + g(x,t)$$

identifiziere die Eichfelder mit Vektorpotenzial + skal. Potenziale

- EM-Erscheinungen sind Folge der Eichinvarianz von ψ.
- Grundlegendes Prinzip moderner fundamentaler Theorie der Materie (QED)
- Alle fundamentalen WW (stark, schwach, EM) werden durch Eichfelder vermittelt, Quanten des EM Feldes $\hat{=}$ Photonen

7.2. Weiterführende Anwendungen der E-Dynamik

- Laserdynamik
  - Wellengleichung im Resonator (mit Randbedingungen) → Modenstruktur
  - WW mit Atomen im Resonator (Zwei-Niveau System) liefert stark nicht-lineare Effekte $\underline{P} \not\sim \underline{E}$
  - photonischen Bauelemente werden durch numerische Methoden exakt über Maxwell-Gleichungen beschreibbar.

- Quantisierung des el. magn. Feldes
  $$\underline{E} = \sum_\lambda \left(u_\lambda(x) E_\lambda(t) + u_\lambda^*(x) E_\lambda^*(t) \right)$$
  - wichtig bei kleinen Feldstärken
  - Randbedingungen im Resonator → Quantisierung der Modenstruktur; b^+ erzeugt ein Photon einer Mode

  Quantenzustände des Lichtes
  - Fock Zustände, kohärente Zustände ...

- Nichtlineare Optik
  - Polarisation zeigt komplexe Abhängigkeit vom Feld $P \sim f(\underline{E}, \underline{E}^2, \underline{E}^3 \dots)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - (\chi_1 + 1)\,\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{nL}}{\partial t^2}}$$

$$\underline{D} = \underline{P} + \varepsilon_0 \underline{E}$$
$$\underline{P} = \underbrace{\underline{P}_{lin}}_{\varepsilon_0 \chi_1 \underline{E}} + \underline{P}_{nL}$$

2. Ordnung:
- optische Gleichrichtung
- Frequenzverdopplung

3. Ordnung:
- Selbstfocussierung
- Vierwellenmischung

7.3. Magnetische Monopole

- In Abwesenheit von Quellen ($j^\mu = 0$) sind die Maxwell-Gl. invariant unter

$$\underline{E} \to c\underline{B} \qquad \underline{B} \to -\frac{1}{c}\underline{E}$$

$$\operatorname{div} \underline{E} = 0, \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \underline{E} = -\dot{\underline{B}}, \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} \qquad (\rho = 0, \underline{j} = 0)$$

- diese Invarianz verschwindet wenn $j^\mu \neq 0$.

Postulat von Dirac 1931: – es ex. magn. Monopole

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot B = \frac{\rho_m}{\varepsilon_0}$$

$$-\frac{1}{c}\dot{\underline{E}} + c\,\nabla \times \underline{B} = c\mu_0 j_e \qquad -\dot{B} - \nabla \times E = c\mu_0 j_m$$

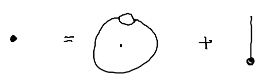
magn. Ströme j_m und Ladungen ρ_m
→ erfüllen auch eine Kontinuitätsgl. für Ladungserhaltung

- $\underline{E}$ kann in $\underline{B}$ transformiert werden wenn Ladungen mittransformiert sind.

- Feld eines magn. Monopols wäre $B_M = g\,\frac{x}{r^3}$ — Monopol im Ursprung

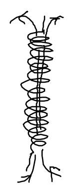
ABER wenn weiter $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ gibt es ein Problem mit magn. Fluss $\oint \underline{B}\, d\underline{f} \neq 0$

Idee: $B_M = \nabla \times \underline{A} - \underline{B}_{String}$



"Dirac String"

WW mit Teilchen nur am Spulenende $\hat{=}$ Monopol →



unendlich lange dünne Spule $\hat{=}$ String

$$\underline{A} = g\,\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\,\underline{e}_\phi$$

↑ Singularität bei $\theta = 0$

- Konzept könnte quantisierte Ladung erklären (über Drehimpulsquantisierung)
- exp. noch nicht nachgewiesen (wahrscheinlich zu hohe Masse)
- Festkörperphysik: neuartige Materialien (Spineis) zeigen Quasiteilchen analog zu Monopol
  DOI: 10.1002/piuz.201701451