

Zusammenfassung 6.5 & 6.7

Die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_{TF}$

$$= -\frac{\epsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa} - \mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu$$

liefert über das Wirkungsprinzip ($\delta W = 0$) die Maxwell-Gleichungen

- homogene Maxwell-Gl. durch Variation der Belm δx^μ bei festem Feld (festem Potenzial)

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0$$

- inhomogene Maxwell-Gl. durch Variation der Felder $\delta \phi^\nu$ bei festem Belm

$$\partial_\nu F^{\nu\kappa} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\kappa$$

Feldstärke tensor $\left[F^{\nu\kappa} = \partial^\kappa \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\kappa \right]$

Bem: • $\mathcal{L}_F = \frac{1}{2c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Die Lagrangedichte eines freien EM Feldes gliedert der Differenz seiner elektrischen und magn. Energiebeiträge.

• $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} = -\frac{8}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ - würde auch die Forderungen an Skalar- und Pseudoskalar erfüllen (liefert aber keinen Beitrag bei Variation)

- ist ein Lorentz-Skalar

↳ (i) $\mathbf{E}, \mathbf{B} \perp$ in einem Inertialsystem

⇒ \perp in allen Inertialsystemen

⇒ \exists Inertialsystem in dem $\mathbf{E} = 0$ und eines in dem $\mathbf{B} = 0$.

7. Ausblick

7.1 Schrödingergleichung und Eichfelder

- aus Lagrangedichte kann über Legendre-Transform. eine Hamiltondichte hergeleitet werden

Beispielhaft an Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}, t)$:

$$L(x, \dot{x}, t) = \underbrace{-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{L_T} - \underbrace{e\phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}_{L_{TF}}$$

" " "
" " "
" " "
" " "
" " "
" " "

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$m(v)$

Generalisierte Impulse:

$$\underline{p}_{kan} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$$

$$= m(v) \mathbf{v} + e \mathbf{A}$$

$$(\underline{p}_{kan} - e \mathbf{A})^2 = (m(v) \mathbf{v})^2$$

Legendre Transform:

$$H(x, \underline{p}_{kan}, t) = \underline{p}_{kan} \cdot \mathbf{v} - L(x, \dot{x}, t)$$

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \underline{m(v)} \mathbf{v}^2 + e \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \underline{m(v)} c^2 + e\phi - e \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \underline{m(v)} \frac{v^2}{c^2} c^2$$

$$= m(v) c^2 + e\phi$$

Umformen um direkte Abh. von \underline{p}_{kan} zu sehen

$$\frac{(H - e\phi)^2}{c^2} = m(v)^2 c^2 = m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2 + m(v)^2 v^2$$

\uparrow
 $(\underline{p}_{kan} - e \mathbf{A})^2$

$$H(x, \underline{p}_{kan}, t) = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 (\underline{p}_{kan} - e \mathbf{A})^2} + e\phi$$

nichtrel. Näherung
 $v \ll c$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{1}{2m_0} (\underline{p}_{kan} - e \mathbf{A})^2 + e\phi = H(x, \underline{p}_{kan}, t)$$

(Hamiltonian der minimalen Kopplung)

Nächster Schritt: Korrespondenzprinzip $\mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$ liefert Hamiltonoperator \hat{H}
für Schrödingergleichung $\hat{H} \psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$

- Formale Eichtransformation (I-II) löst SG mit Feld invariant:

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi(x, t) e^{i \frac{e}{\hbar} F(x, t)} \quad \text{(I)}$$

$$\mathbf{A}(x, t) \rightarrow \mathbf{A}(x, t) + \nabla F(x, t) \quad \text{(II)}$$

$$\phi(x, t) \rightarrow \phi(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \quad \text{(III)}$$

Bem.: Invarianz bezgl. Phasenänderung liefert Ladungserhaltung

② Aus freiem Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ kann durch Forderung der Eichinvarianz (GE|I) eine Bedingung an ∇ und $\frac{\partial}{\partial t}$ hergeleitet werden:

$$\nabla \rightarrow \nabla + f(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + g(x,t)$$

↑ identifiziere die Eichfelder mit
Vektorpotenziale + skal. Potentiale

- EM-Erscheinungen sind Folge der Eichinvarianz von \mathcal{L}

- Grundlegendes Prinzip moderner fundamentaler Theorie der Materie (QED)
- Alle fundamentalen WW (stark, schwach, EM) werden durch Eichfelder vermittelt, Quanten des EM Feldes $\hat{=}$ Photon

7.2, Weiterführende Anwendungen der E-Dynamik

• Laserdynamik

- Wellengleichung im Resonator (mit Randbedingungen)
→ Modenstruktur
- WW mit Atomen im Resonator (Zwei-Niveau System) liefert starke nicht-lineare Effekte
 $\rho \sim E$
- photarischen Bauelemente werden durch numerische Methoden exakt über Maxwell-Gleichungen beschreibbar.

• Quantisierung des el. mag. Feldes

- wichtig bei relativ Feldstärken $E = \sum_{\lambda} (u_{\lambda}^{\mu} E_{\lambda}(t) + u_{\lambda}^{\nu} E_{\lambda}^{\nu}(t))$
- Randbedingungen im Resonator → Quantisierung der Modenstruktur
 b^{\dagger} erzeugt ein Photon einer Mode
- Quantenzustände des Lichtes
- Fock Zustände, Kohärente Zustände ...

• Nichtlineare Optik

- Polarisation zeigt komplexe Abhängigkeit vom Feld $\rho \sim f(E, E^2, E^3, \dots)$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - (\chi_1 + 1) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

$$D = P + \epsilon_0 E$$

$$P = P_{lin} + P_{NL}$$

$$\uparrow$$

$$\epsilon_0 \chi_1 E$$

2. Ordnung: - optische Gitterbildung

- Frequenzverdopplung

3. Ordnung: - Selbstfokussierung

- Vierwellenmischung

7.3. Magnetische Monopole

• In Abwesenheit von Quellen ($j^\mu = 0$) sind die Maxwell-Gl. invariant

Unter $\underline{E} \rightarrow c\underline{B}$
 $\underline{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\underline{E}$

$\text{div } \underline{E} = 0$
 $\text{div } \underline{B} = 0$
 $\text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$
 $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\underline{E}}$

($g=0, \dot{g}=0$)

• diese Invarianz破kündigt wenn $j^\mu \neq 0$.

Postulat von Dirac 1931: - es ex. magu. Monopole

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \underline{B} = \frac{\rho_m}{\epsilon_0}$$

$$-\frac{1}{c} \dot{\underline{E}} + c \nabla \times \underline{B} = c \mu_0 \underline{j}_e \quad -\dot{\underline{B}} - \nabla \times \underline{E} = c \mu_0 \underline{j}_m$$

magu. Ströme \underline{j}_m und Ladungen ρ_m
 \rightarrow erfüllen auch eine Kontinuitätsgl. für Ladungserhaltung

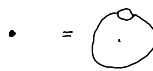
• \underline{E} kann in \underline{B} transformiert werden wenn Ladungen mittransformiert sind.

- Feld eines magu. Monopols wäre $\underline{B}_M = g \frac{\underline{x}}{r^3}$ Monopol im Ursprung

ABER wenn weiter $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ gibt es ein Problem mit magu. Fluss $\oint \underline{B} \cdot d\underline{l} \neq 0$

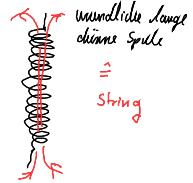
Idee:

$$\underline{B}_M = \nabla \times \underline{A} - \underline{B}_{\text{String}}$$



"Dirac String"

Wd mit Folchen an Spulenende Monopol



unendliche lange dünne Spule $\hat{=}$ String

$$\underline{A} = g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \underline{e}_\phi$$

↑ Singularität bei $\theta = 0$

- Konzept könnte quantisierte Ladung erklären (über Drehimpulsquantisierung)
- exp. noch nicht nachgewiesen (wahrscheinlich zu hohe Masse)
- Festkörperphysik: neuartige Materialien (Spinels) zeigen Quantenanalogy zu Monopol
DOI: 10.1002/pip.201701451