

6.3. Transformationsverhalten der Ströme und Felder

wir kennen bereits:

Zeit-Ordnreketoren (Weltlinien)

4-er Geschwindigkeit

4-er Energie-Impuls

4-er Kraft

$$x^\mu = (ct, \underline{x})$$

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \underline{v})$$

$$p^\mu = (E/c, \underline{p})$$

$$f^\mu = (\gamma \frac{E \cdot \underline{v}}{c}, \gamma \underline{F})$$

← (kontra-varianten Vektor)
aus Minkowski-Raum V

nach zu tun: Strom, Potentiale, Felder

Transformationsverhalten:
unter Lorentz-Transfo

$$x^{\mu'} = U^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

$$U^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($\forall \mu, \nu$)

↓
bestimmt, ob Vektor
ko- oder kontravariant ist.

Bem: $U^{\mu'}_{\nu}$ bildet ab von $V \rightarrow V$

metrischer Tensor: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ bildet ab von
 $V \rightarrow \tilde{V}$

$$x_{\mu'} = U_{\mu'}^{\nu} x_{\nu}$$

mit $U_{\mu'}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bem: $U_{\mu'}^{\nu}$ von $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$
 $\hat{=}$ Transponierte Matrix von $U^{\mu'}_{\nu}$

Zusätzlich gilt wegen Invarianz
des Skalarproduktes $U^{-1} = U^T$.

Ziel: Ko-/Kontravariante Formulierung der Elektrodynamik im Vakuum

Motivation/Grund: Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

• gas dem Anstoß für Einstein zur
Formulierung der SRT

- Kontinuitätsgleichung für Ladungserhaltung:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \partial_i j^i = 0$$

→ Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen
gelten.
→ muss als 4-er Skalarprodukt formulierbar sein

1) 4-er Gradient:

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

transformiert sich bei Lorentz-Transform kovariant

da: $\partial'_\mu f = [U^\top]^\nu_\mu \partial_\nu f$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} f = \sum_\nu \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}}_{U^{-1}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} f \quad (\text{Kettenregel})$$

↳ inverse Lorentz-Transform

$$\begin{cases} x^{\mu'} = U^\mu_{\nu'} x^\nu \\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = U^\mu_{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{cases}$$

2) 4-er Ladungs & Stromdichte

$j^\mu := (c\rho, \underline{j})$; das Transformationsverhalten ergibt sich über Definition von \underline{j}

$$\rightarrow j^{\mu'} = U^\mu_{\nu'} j^\nu$$

$$\cong \begin{cases} j^{0'} = \gamma (j^0 - \beta j^1) \\ j^{1'} = \gamma (j^1 - \beta j^0) \\ j^{2'} = j^2 \\ j^{3'} = j^3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho' = \gamma (\rho - \frac{v}{c^2} j^1) \\ j^{1'} = \gamma (j^1 - v\rho) \end{cases}$$

Für $v \neq 0$ "mischt" die Lorentz-Transform Ladungsdichte und Komp. der Stromdichte

• Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu j^\mu = 0$

3) d'Alambert-Operator durch Iso-/Lorentz-Varianten Gradienten ausdrücken

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\partial_\mu \partial^\mu$$

[div][grad]

$$\square = -\partial_\mu \partial^\mu$$

4-er Potentiale

Die elektrodyn. Potentiale ϕ, \underline{A} sind (in der Lorenz-Eichung)

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

mit $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{c\rho}{\epsilon_0 c} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu (cA^i) = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^i \end{cases} \quad i=1,2,3$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi^{\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^{\nu} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \phi^0 = \phi \\ \phi^i = c A^i \end{cases} \quad i=1,2,3$$

Da j^μ ein 4-Vektor, muss ϕ^ν wie auch wie ein 4-Vektor transformieren. (da $\partial_\nu \partial^\mu$ Lorentz invariant)

$$\begin{aligned} \phi'^0 &= \gamma(\phi^0 - v \phi^1) & \phi'^1 &= \gamma(\phi^1 - v \phi^0) \\ \phi'^2 &= \phi^2 & \phi'^3 &= \phi^3 \end{aligned} \quad \hat{=} \quad A'^i = \gamma(A^i - \frac{v}{c^2} \phi^0) \quad \hat{=} \quad (\phi'^\nu = U^\nu_{\mu} \phi^\mu)$$

Zurück zur Lorenz-Eichung: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \phi^\mu = 0 \quad \text{Lorentz-invariant!}$$

d.h. Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant. (im Gegensatz zur Coulombs Eichung)

Eichtransformationen mit skalarem ψ :

(Erinnerung: Maxwell-Gl. u. Felder sind invariant gegenüber Eichtransformationen der Potentiale)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\underline{A}} &= \underline{A} + \nabla F \\ \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \tilde{\phi}^i &= c \tilde{A}^i = c A^i + \partial_i (c F) \\ \tilde{\phi}^0 &= \phi^0 - \partial_0 (c F) \end{aligned}$$

$$\hat{=} \quad \tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \psi$$

mit beliebigem (Lorentz-ino) differenzierbarem skalarem Feld $\psi(x^\mu)$ des 4-er Vektors x^μ .

Felder $\underline{E}, \underline{B}$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} & \rightarrow E^i &= -\partial_i \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c A^i = -\partial_i \phi^0 - \partial_0 \phi^i = \partial^i \phi^0 - \partial^0 \phi^i \\ \underline{B} &= \nabla \times \underline{A} & \rightarrow c B^1 &= \partial_2 c A^3 - \partial_3 c A^2 = \partial_2 \phi^3 - \partial_3 \phi^2 = \partial^3 \phi^2 - \partial^2 \phi^3 \\ & & & \text{zyklische Vertauschung} \end{aligned} \quad i=1,2,3$$

$$\begin{aligned} c B^2 &= \partial^1 \phi^3 - \partial^3 \phi^1 \\ c B^3 &= \partial^2 \phi^1 - \partial^1 \phi^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassung anti-symmetrischer Feldtensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

* (äquivalent zu 2 Maxwell-Gleichungen)

zeit. Spalte ↓ 6	0	1	2	3	
$F^{\mu\nu}$	0	$-E^1$	$-E^2$	$-E^3$	0
	E^1	0	$-cB^3$	cB^2	1
	E^2	cB^3	0	$-cB^1$	2
	E^3	$-cB^2$	cB^1	0	3

• Wegen der Antisymmetrie hat $F^{\mu\nu}$ nur 6 unabhängige Komponenten.

• Lorentz-Transform der Felder: $F^{\mu\nu}$ ist Tensor 2. Stufe: $F'^{\mu\nu} = U^\mu_\lambda U^\nu_k F^{\lambda k}$ (v || x')

Im einzelnen: $\underline{E'^1} = F'^{10} = U^1_\lambda U^0_k F^{\lambda k} = -\gamma U^0_k F^{0k} + \gamma U^k_0 F^{k0} = (\beta\gamma)^2 F^{01} + (\gamma)^2 F^{10} = \gamma^2 (1 - \beta^2) F^{10} = \underline{E^1}$

$U^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vdots$$

$$E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3)$$

$$E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2)$$

analog

$$B'^1 = B^1$$

$$B'^2 = \gamma(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3)$$

$$B'^3 = \gamma(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2)$$

• Elektrische und magnetische Felder werden beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen ineinander transformiert.