

Nachtrag zur Wellenoptik

• Greenfkt. \tilde{G} der Helmholtzgleichung $(\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}') = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$ ist eine

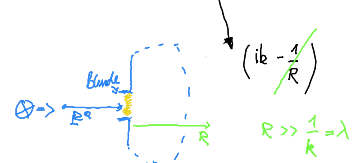
Kugelwelle $\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$ für $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

• Lösung für $\phi(\underline{r})$ ist Überlagerung der Kugelwellen (richtungsabhängig)
 → Huygensches Prinzip

• Mit Kirchhoffscher Identität (Green'scher Satz angewandt auf Wellenoptik) + RB + Fernzone

$$\phi(\underline{r}') = -\frac{i}{\lambda} \int_F d\vec{f} \phi(\underline{r}) \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

↳ Werte auf der Blende

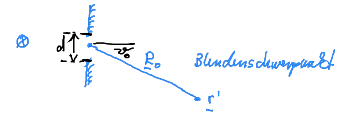


• Kirchhoffsche Näherung:

$$\phi(\underline{r})|_B = \frac{e^{ikR^2}}{R^2} \quad (\text{eingefallene Kugelwelle})$$

nicht abhängig vom Punkt auf der Blende!

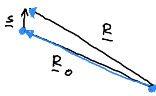
• Näherung der kleinen Blende



$$\phi(\underline{r}) \approx \frac{i}{\lambda} \frac{\cos \theta}{R_0 R_0^2} \int_F d\vec{f} e^{ik(R + R^2)}$$

Beugungsintegral

→ Fraunhofer Beugung
 $d \ll R$



$$R = R_0 + \varepsilon$$

$$R^2 \approx R_0^2 + 2R_0 \varepsilon$$

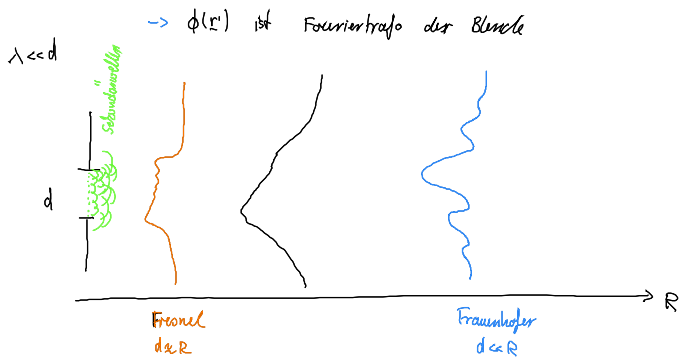
$$R = \sqrt{R_0^2 + 2R_0 \varepsilon}$$

$$\approx R_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{R_0} \cdot 2R_0 \varepsilon \quad (\text{Taylor})$$

$$\approx R_0 + \varepsilon$$

→ Fresnelsche Beugung
 $d \approx R$

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0 \varepsilon + \varepsilon^2$$



Nachtrag: d'Alembertoperator: "Wir" $\Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} =: \square \rightarrow \square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

"z.B. Schrodinger" $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta =: \square \rightarrow \square \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

5.3.1. Materialgleichungen zu Maxwell-Gl. in Materie

einfachste Materialgleichungen

$$\textcircled{1} \quad \underline{P} = \epsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{E}$$

$$\underline{M} = \underline{\chi}_M \underline{H}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{\underline{\chi}_M}{1 + \underline{\chi}_M} \underline{B}$$

$\underline{\chi}_e, \underline{\chi}_M$: Suszeptibilitäten

\underline{H} : von freien Strömen erzeugte Feld
Magnetfeld

\underline{D} : von freien Ladungen erzeugt

Bemerkung: $\underline{E} = 0 \rightarrow \underline{P} = 0$
 $\underline{B} = 0 \rightarrow \underline{M} = 0$ $\textcircled{1}$ beschreibt keine Ferromagneten und keine Ferroelektrika

- es gilt stets $\chi_e > 0$
 $\chi_M \leq 0$ para/magnetically

- ein Term $\sim \underline{B}$ in \underline{P}
 $\sim \underline{E}$ in \underline{M} kann nicht auftreten, wegen folgendem Raumspiegelungsverhalten
 \underline{E} polarer Vektor $\rightarrow \underline{S}_P = -\text{div } \underline{P}$ ist skalar
 \underline{B} axialer Vektor $\rightarrow \underline{d}\underline{M} = \text{rot } \underline{M}$ ist polar

Abweichungen vom $\textcircled{1}$:

"nicht isotrop" (i) für anisotrope Kristalle: $\underline{P} = \epsilon_0 \underline{\underline{\chi}}_e \underline{E}$ $\underline{\underline{\chi}}_e$ symm. Tensor

"nicht skalar" (ii) für starke Felder: $\underline{P} = \epsilon_0 (\underline{\chi}_e^{(1)} \underline{E} + \underline{\chi}_e^{(3)} \underline{E}^3 + \dots)$

Bsp. Nichtlinearitäten: Bistabilität
4-Wellen Mischen

"nicht lokal, instantan"

(iii) für hochfrequente Felder

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \iint d^3r' dt' \chi_e(\underline{r}, \underline{r}', t, t') \underline{E}(\underline{r}', t')$$

räumliche bzw. zeitliche Dispersion

$$\hat{\underline{P}}(\underline{k}, \omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\underline{k}, \omega) \hat{\underline{E}}(\underline{k}, \omega)$$

5.4. Grenzbedingungen für Felder

Frage: Wie verhalten sich $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ an Grenzflächen an Grenzflächen die verschiedene el./magn. Materialien trennen?
z. B. Vakuum - Materie

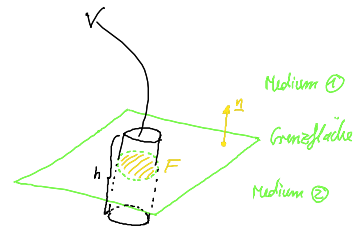
Integration der Maxwell-Gleichungen über Volumen V :

$$(1) \int_V d^3r \nabla \times \underline{E} = - \int_V d^3r \dot{\underline{B}}$$

$$(2) \int_V d^3r \nabla \times \underline{H} = \int_V d^3r (\underline{j} + \underline{D})$$

$$(3) \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{B} = 0 \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B}$$

$$(4) \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{D} = \int_V d^3r \rho_s \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{D}$$



$$\underline{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \underline{E}$$

Normalkomponenten:

$$h \rightarrow 0 \quad (3) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \int_F d\underline{f} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = 0 \quad \rightarrow \text{Normalcomp. von } \underline{B} \text{ ist stetig!}$$

$$(4) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{D} = \int_F d\underline{f} \cdot (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{\sigma} \quad \rightarrow \text{Normalcomp von } \underline{D} \text{ hat einen Sprung!}$$

Annahme: Grenzfläche trägt freie Oberflächenladungen

$$\rho(\underline{r}, t) = \sigma(x, y, z) \delta(z) \quad \underline{e}_z = \underline{n}$$

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_V d^3r \rho_s = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{\sigma}$$

Tangentialkomponenten:

verallgemeinertes Gauß'sches Satz

$$(2) \int_V d^3r \nabla \times \underline{H} \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \times \underline{H} = \int_V d^3r (\underline{j} + \underline{D})$$

$h \rightarrow 0 \Rightarrow$ "nur noch Grenzflächen"

$$(1) \int_V d^3r \nabla \times \underline{E} = \int_{\partial V} d\underline{f} \times \underline{E} = - \int_V d^3r \dot{\underline{B}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial V} d\vec{l} \times \vec{H} = \int_F d\vec{l} \vec{n} \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial V} d\vec{l} \times \vec{E} = \int_F d\vec{l} \vec{n} \times (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)})$$

Annahme Grenzfläche trägt freie Flächenstromdichte
 $\vec{j}(x, y, z) = \vec{g}(x, y, z) \delta(z)$ (z.B. Metall)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V d^3r \vec{j} = \int_F d\vec{l} \vec{g}$$

\vec{B}, \vec{D} und \vec{E}, \vec{H} sind beschränkt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V d^3r \vec{E} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_V d^3r \vec{D} = 0$$

=> Zusammenhangsformeln gilt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)}) = \sigma$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \vec{g}$$

← Normalkompon. von \vec{B} stetig
 ← " von \vec{D} hat Sprung
 ← Tangentialkompon. von \vec{E} ist stetig
 ← Tangentialkomponente von \vec{H} hat einen Sprung

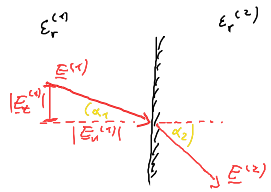
$$\delta \vec{E} = \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)} \text{ usw.}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & \vec{n} \times \delta \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{n} \cdot \delta \vec{D} &= \sigma \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}} & \vec{n} \times \delta \vec{H} &= \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{n} \cdot \delta \vec{B} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

Beispiele (1) Grenzfläche zwischen 2 dielektrischen Materialien mit $\epsilon_r^{(1)} < \epsilon_r^{(2)}$ und $\sigma = 0$

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_e^{(2)} + \vec{E}_u^{(2)} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_e^{(1)} = \vec{E}_e^{(2)} \quad \vec{D}_u^{(1)} = \vec{D}_u^{(2)} \rightarrow \epsilon_r^{(1)} \vec{E}_u^{(1)} = \epsilon_r^{(2)} \vec{E}_u^{(2)}$$

$$\rightarrow \vec{E}_u^{(2)} = \frac{\epsilon_r^{(1)}}{\epsilon_r^{(2)}} \vec{E}_u^{(1)}$$



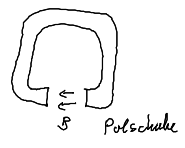
Brechungsgesetz der Feldlinien

$$\tan \alpha_1 = \frac{|E_o^{(1)}|}{|E_n^{(1)}|} = \frac{\epsilon_r^{(1)} |E_o^{(2)}|}{\epsilon_r^{(2)} |E_n^{(2)}|} = \frac{\epsilon_r^{(1)}}{\epsilon_r^{(2)}} \tan \alpha_2$$

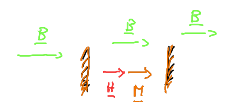
(2) Grenzfläche zwischen Luft und wagn. Material

(2.1) Sei speziell $\vec{B} \perp$ Grenzfläche

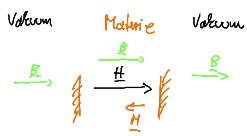
→ \vec{B} stetig



a) Paramagnet $\vec{H} \uparrow \uparrow \vec{M}$



b) Diamagnet $\vec{H} \uparrow \downarrow \vec{M}$



(z.z.) $\underline{B} \parallel$ Grenzfläche (z.B. lange Spule)
 \rightarrow \underline{H} stetig für $\underline{g} = 0$