

English Summary:

Field tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

homogeneous Maxwell's eqs.
(4 - curl)

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial^\nu F^{\lambda\kappa} = 0$$

Levi-Civita tensor

Inhomogene Maxwell-gln. (im Vakuum)

$$(3) \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho$$

$$\Leftrightarrow \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = \frac{1}{\epsilon_0 c} \rho$$

$$\Leftrightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0} \quad \text{da } \partial_0 F^{00} \equiv 0 \quad \mu=0,1,2,3$$

$$(4) \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

1. Komponente:

$$\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1$$

$$\text{mit } \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} :$$

$$\Leftrightarrow \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$$

$$\Leftrightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1} \quad \text{da } \partial_1 F^{11} = 0$$

analog für 2. und 3. Komponente!

Zusammenfassung der inhomog. Maxwell-gln.:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu} \quad (\text{"4-Divergenz"})$$

Bem.: (i) Die homog. Maxwell-gln. sind durch den Potenzialansatz

$$F_{\lambda\kappa} = \partial_\lambda \phi_\kappa - \partial_\kappa \phi_\lambda$$

automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa}_{!=0} - \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\kappa \phi_\lambda}_{!=0} = 0$$

infolge der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$

($\nu \leftrightarrow \lambda$)

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa = -\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\kappa \phi_\lambda$$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-gln.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu \quad \nu=0,1,2,3$$

folgt mit der Lorenz-Eichung $\partial_\mu \phi^\mu = 0$

$$\partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu = \partial^\nu \partial_\mu \phi^\mu = 0$$

Also

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu} \quad \text{inhomog. Wellengl.}$$

(iii) Die Maxwell-gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu \end{aligned}}$$

sind Lorentz-kovariant, weil sie durch 4-Vektoren ausgedrückt sind.

6.3 Relativistisches Hamilton-Prinzip

Ziel: Formulierung der Elektrodynamik als Lagrange'sche Feldtheorie

Die relativist. Dynamik eines freien Massenpunktes lässt sich aus dem Extremalprinzip

$$\delta W = 0, \quad W \sim \int_1^2 ds \quad (\text{Wirkungsintegral})$$

$ds = \frac{c}{\gamma} dt$ Lorentzinvariant

herleiten, wobei 1 und 2 Anfangs- und End-Ereignis im 4-Raum sind und $\delta x^\mu \Big|_{1,2} = 0$



Newton'sche Mechanik ist Grenzfall für $\beta \ll 1$:

$$\Rightarrow W = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1 - \beta^2)^{1/2} dt$$

$$\approx \int \underbrace{\left(-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 \right)}_{\text{Lagrange-Fkt.}} dt$$

WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^\mu(x^\nu)$

$$\Rightarrow W = \int_1^2 \left\{ \underbrace{-m_0 c ds}_{\text{Lorentz-Invarianten}} - \underbrace{\varphi^\mu dx_\mu} \right\}$$

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c \delta(ds) - \delta(\varphi^\mu dx_\mu) \right\}$$

$$\text{mit } \delta(ds) = \delta(dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{d(\delta x^\mu) dx_\mu + dx^\mu (d\delta x_\mu)}{ds}$$

$$\left[(d\delta x^\mu) dx_\mu = dx^\mu (d\delta x_\mu) \right]$$

$$= \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) = u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\text{und } \delta(\phi^M dx_\mu) = \delta\phi^M dx_\mu + \phi^M d(\delta x_\mu)$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c u^\mu d(\delta x_\mu) - \delta\phi^M dx_\mu - \phi^M d(\delta x_\mu) \right\} \quad (*)$$

Part. Integr. $[-m_0 c u^\mu \delta x_\mu]_1^2 + \int_1^2 m_0 c du^\mu \delta x_\mu - [\phi^M \delta x_\mu]_1^2 + \int d\phi^M \delta x_\mu$

$= 0$ weil $\delta x_\mu|_{1,2} = 0$

$\int_1^2 ds m_0 c \frac{du^\mu}{ds} \delta x_\mu$

Mit $d\phi^M = \partial^\nu \phi^M dx_\nu = \partial^\nu \phi^M u_\nu ds$

$$\delta\phi^M = \partial^\nu \phi^M \delta x_\nu$$

$$\delta\phi^M dx_\mu = \partial^\nu \phi^M \delta x_\nu dx_\mu = \partial^\mu \phi^\nu \delta x_\nu dx_\mu = \partial^\mu \phi^\nu u_\nu \delta x_\mu ds$$

Einsetzen in (*):

$$\delta W = \int_1^2 ds \left\{ m_0 c \frac{du^\mu}{ds} - (\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu) u_\nu \right\} \delta x_\mu$$

Da $\delta W = 0$ für bel. Variation δx_μ gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^\mu}{ds} = f^{\mu\nu} u_\nu} \quad \text{mit} \quad \boxed{f^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu}$$

relativist. Beweg. gl. eines Massenpunktes der Ruhemasse m_0 , Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft.

Setze hierzu $p^\mu = m_0 c u^\mu$ 4-Impuls

$$f^{\mu\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} = \frac{q}{c} (\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu)$$

$$\phi^\mu = \frac{q}{c} \phi^M$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu} \Leftrightarrow \boxed{\delta W = \delta \int_1^2 \left\{ -m_0 c ds - \frac{q}{c} \phi^M dx_\mu \right\} = 0}$$

Lagrange-Fkt. $L_{\text{Feld-Materie}} dt = (-q\phi - qv \cdot \underline{A}) dt$

$$= -\frac{q}{c} \phi^M dx_\mu$$

Die Ortskomp $i=1,2,3$ stimmen mit

$$\boxed{\frac{d\underline{p}}{dt} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})}$$

überein, denn mit $u^0 = \gamma$, $u^i = \frac{\gamma}{c} v^i = -u_i$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d p^1}{d t} &= q(E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2) \\ &= q(F^{10} + F^{21} \frac{1}{c} v^2 - F^{13} \frac{1}{c} v^3) \\ &= \frac{q}{\gamma} (F^{10} \gamma - F^{12} \frac{\gamma}{c} v^2 - F^{13} \frac{\gamma}{c} v^3) \\ &= \frac{q}{\gamma} (F^{1\mu} u_\mu) \end{aligned}$$

also mit $ds = \frac{c}{\gamma} dt$:

$$\frac{d p^1}{d s} = \frac{q}{c} F^{1\mu} u_\mu \quad \underline{\text{Newton mit Lorentzkraft}}$$

Die zeitartige Komponente $\mu=0$ gibt wegen $p^0 = \frac{E}{c}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d s} \left(\frac{E}{c} \right) &= \frac{q}{c^2} \frac{d E}{d t} = \frac{q}{c} (F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3) \\ &= q \frac{q}{c^2} (E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d E}{d t} = q \underline{E} \cdot \underline{v}}$$

Leistungsbilanz