

English Summary

momentum balance: $\frac{\partial \underline{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{T} = -(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$

momentum density $\underline{g} = \underline{D} \times \underline{B}$

momentum flux density, $\underline{T} = \underline{1} W - \underline{E} \otimes \underline{D} - \underline{B} \otimes \underline{H}$ (Maxwell tensor)
 $\stackrel{=}{=} \underline{T}$

gauge invariance: $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla F$

$\phi' = \phi - \frac{\partial F}{\partial t}$

Lorenz gauge

$\nabla \cdot \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

\Rightarrow

$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$
 $\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$

decoupled
wave eqs.

$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ d'Alembert

$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ velocity of light

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$\nabla \cdot \underline{A} = 0$

Allg.: Zerlegung von $\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

in Longitudinalfeld $\underline{E}_l := -\nabla \phi$ (wirbelfrei)

und Transversalfeld $\underline{E}_t := -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ (quellenfrei)

Tatsächlich gilt: $\nabla \times \underline{E}_l = -\nabla \times \nabla \phi = 0$

$\nabla \cdot \underline{E}_t = -\frac{\partial \nabla \cdot \underline{A}}{\partial t} = 0$

\underline{B} ist immer transversal: $\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$

Also: ϕ ergibt die longitudinalen,
 \underline{A} die transversalen Felder

Zerlegung der Stromdichte: $\underline{j} = \underline{j}_l + \underline{j}_t$

mit $\nabla \times \underline{j}_l = 0$, $\nabla \cdot \underline{j}_t = 0$

Mit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j}_l + \nabla \cdot \underline{j}_t = 0$
 $\underbrace{\quad}_{\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}_l} \quad \underbrace{\quad}_0 = 0$

$$\nabla \cdot \left(\underline{j}_l + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_l}{\partial t} \right) = 0$$

Außerdem gilt nach Def. von „longitudinal“:

$$\nabla \times \left(\underline{j}_l + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_l}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{j}_l + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_l}{\partial t} = \text{const.} = 0, \text{ da für } r \rightarrow \infty \text{ verschwindet}$$

$$\Rightarrow \underline{j}_l = \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Die Feldgl. $\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\underbrace{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}}_{\square \underline{A}} - \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \underline{A})}_0 - \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\underline{j}_l} = -\mu_0 \underline{j}$$

erhalten die Form

$$\begin{cases} \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_t \end{cases}$$

\Rightarrow longit. Felder $\hat{=}$ Elektrostatik

\Rightarrow transv. Felder $\hat{=}$ el. magn. Wellen

Die Coulomb-Eichung ist zweckmäßig bei Strahlungsproblemen!

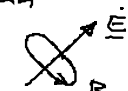
Poisson-gl. für ϕ

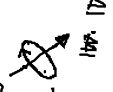
Wellen-gl. für \underline{A}

4. Elektromagn. Wellen

Im statischen Fall sind \underline{E} und \underline{B} entkoppelt.

Im dynamischen Fall sind \underline{E} und \underline{B} über den

Verschiebungsstrom $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \underline{j} = \epsilon_0 \dot{\underline{E}}$ 

und das Induktionsgesetz $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$ 
gekoppelt \Rightarrow elektromagn. Wellenausbreitung

4.1 Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Betrachte Raumbereich ohne Quellen: $\underline{j} = 0$
 $\underline{j} = 0$

$\begin{aligned} \square \phi &= 0 \\ \square \underline{A} &= 0 \end{aligned}$	<p>homogene Wellengln. (Lorenz-Eichung)</p>
---	---

Wegen $\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \nabla \phi$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ gilt auch

$\begin{aligned} \square \underline{E} &= 0 \\ \square \underline{B} &= 0 \end{aligned}$
--

(Dies folgt auch direkt aus $\nabla \times \underline{B} = \epsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$, $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) &= \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{E})}_0 - \Delta \underline{E} = -\nabla \times \dot{\underline{B}} = -\epsilon_0 \mu_0 \ddot{\underline{E}} \\ &\Leftrightarrow \left(\Delta - \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{E} = 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung von $\square u(x,t) = 0$

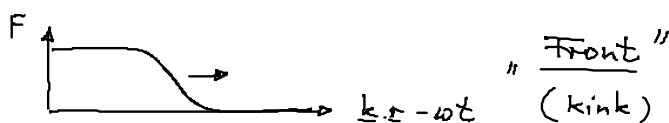
$$u(x,t) = F(k \cdot r - \omega t)$$

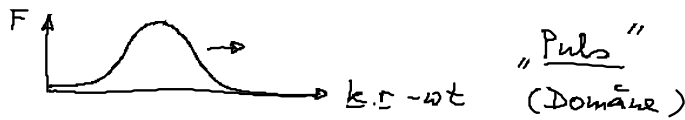
mit beliebiger, 2x diff.barer Funktion $F(\varphi)$

und $\omega = c |k|$ (d'Alembert'sche Lösung)

Beweis: $\square F = (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) F''(\varphi) = 0$ \square

NB: F muss nicht periodisch in φ sein,
z.B. solitäre Wellen:

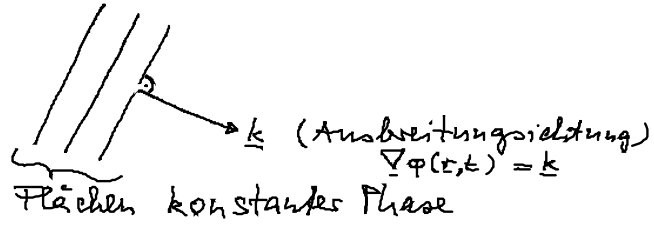




\underline{k} Wellenvektor

ω Frequenz

φ Phase



⇒ ebene Welle

$$k \cdot r - \omega t = \varphi(r, t) \stackrel{!}{=} \text{const.} : \text{Ebene}$$

$$k \cdot \left[r - \frac{1}{k^2} k (\omega t + \varphi) \right] = 0$$

Ausbreitung der Orte konst. Phase $\underline{r}(t) = \frac{1}{k^2} k (\omega t + \varphi)$

⇒ Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{dr}{dt} \Big|_{\varphi = \text{const.}} = \frac{k}{k^2} \omega = c \frac{k}{k} =: v$

spezielle Lösung: harmonische ebene Welle

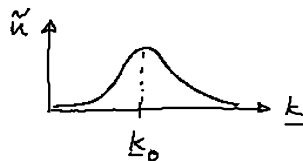
$$u(r, t) = \underbrace{\tilde{u}(k)}_{\text{komplexe Amplitude}} e^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

[Lit.: L. Brillouin, Wave prop. and group velocity, 1960]

lineare Superposition (für allg. Dispersionsrel. $\omega(k)$):

$$u(r, t) = \int d^3k \tilde{u}(k) e^{i(k \cdot r - \omega(k) t)}$$

Sei $\tilde{u}(k)$ um k_0 lokalisiert:



⇒ Wellenpaket (im Ortsraum lokalisiert)

Denn: Taylor-Entwicklung der Phase um k_0

$$\omega(k) \approx \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \underbrace{(k-k_0)}_{\tilde{k}} \underbrace{\left. \frac{\nabla_k \omega(k)}{k=k_0} \right|}_{v_g} + \dots$$

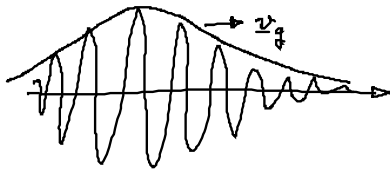
$$= \omega_0 + \tilde{k} \cdot v_g + \dots$$

ergibt

$$u(r, t) = e^{i(k_0 r - \omega_0 t)} \int d^3 \tilde{k} \tilde{u}(k_0 + \tilde{k}) e^{i \tilde{k} (r - v_g t)}$$

Trägerwelle
mit Phasen-
geschw. $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Einhüllende,
Max. bewegt sich mit
Gruppengeschw. $v_g = \nabla_k \omega(k)$



Dispersionsrelation, $\omega(k)$

el. magn. Wellen im Vakuum $\omega(k) = c|k|$

$$\Rightarrow v_g = -\frac{k}{|k|} \stackrel{!}{=} v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \underline{n}$$

keine Dispersion (d.h. kein Zerfließen)!

(im Gegensatz zu el. magn. Wellen in dispersiven Medien
oder gm. Materiewellen im Vakuum)

Polarisation

Betrachte el. magn. Welle $\underline{E}(r, t) = \underline{E}_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$
 $\underline{B}(r, t) = \underline{B}_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$

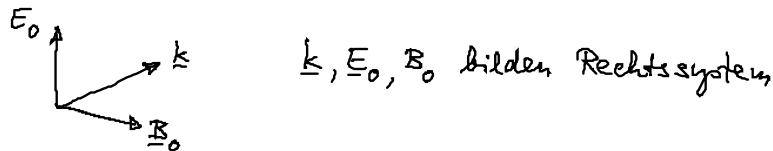
\underline{E} heißt transversal, falls $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ (quellenfrei)
 $\Rightarrow i \underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \perp \underline{k}$

\underline{E} heißt longitudinal, falls $\nabla \times \underline{E} = 0$ (wirbelfrei)
 $\Rightarrow i \underline{k} \times \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \parallel \underline{k}$

Für $g=0$ ist wegen $\nabla \cdot \underline{E} = 0$: $\underline{E}(r,t)$ transversal
 stets wegen $\nabla \cdot \underline{B} = 0$: $\underline{B}(r,t)$ transversal

Weiter folgt aus $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$:

$$(\underbrace{i\mathbf{k} \times \underline{E}_0}_{\frac{1}{c|\mathbf{k}|}} - i\omega \underline{B}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} = 0 \Rightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \underbrace{\underline{n}}_{\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}} \times \underline{E}_0$$



Die Richtung von $\text{Re}\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt Polarisation fest.

Sei $\underline{k} \parallel \underline{e}_3$ -Achse

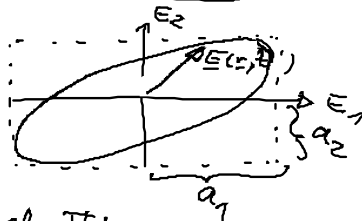
$$\underline{E}_0 = E_{01} \underline{e}_1 + E_{02} \underline{e}_2 \quad \text{mit } E_{0i} = a_i e^{i\delta_i} \in \mathbb{C} \quad (a_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i=1,2)$$

Physik. Feld : $E_1 = a_1 \cos(\varphi + \delta_1)$ $\varphi = \mathbf{k} \cdot \underline{r} - \omega t$

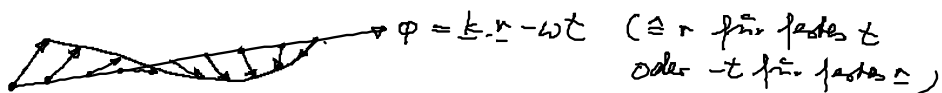
$$E_2 = a_2 \cos(\varphi + \delta_2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{E_1}{a_1} \frac{E_2}{a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad \delta = \delta_2 - \delta_1$$

Ellipsengl. für E_1, E_2 :



Der Feldvektor \underline{E} läuft als Fkt. von φ
 auf einer Ellipse $\perp \underline{k}$ um : elliptische Polarisation



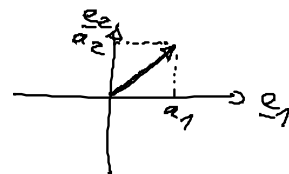
Spezialfälle :

(a) linear polarisierte Welle : $\delta_1 = \delta_2 + n\pi$

$$\Rightarrow \sin \delta = 0, \cos \delta = \pm 1$$

$$\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0$$

gerade $\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 \cos \varphi(r,t)$
 \underline{E}_0 reell



(b) Zirkular polarisierte Welle : $a_1 = a_2 = a$

$$\boxed{E_1^2 + E_2^2 = a^2}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \delta = 0$$

$$\sin \delta = \pm 1$$

(Überlagerung zweier um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobener lin. polar. Wellen)

\vec{E} läuft auf Kreis um : $\vec{E}(x,t) = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \pm \sin \varphi \end{pmatrix}$

links- / rechts-zirkular polarisiert

