

English Summary:

Relativistic mechanics:

• Eigentime  $\tau := \frac{s}{c}$ ,  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ ,  $ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2}$

• 4-velocity  $u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}$ ,  $u^\mu u_\mu = 1$

• 4-momentum  $p^\mu := m_0 c u^\mu$ ,  $p^\mu p_\mu = (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

$\left. \begin{array}{l} p^0 = m(\vartheta) c \\ p^i = m(\vartheta) v^i \end{array} \right\}$  relativistic mass  $m(\vartheta) := \gamma m_0$

• 4-force  $f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu$

• energy  $E := c p^0 = m(\vartheta) c^2$

↑  
rest momentum

energy-momentum relation

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$$

(limiting cases  $\left\{ \begin{array}{l} \text{non-relativistic:} \\ |v| \ll mc \\ \text{high-relativistic:} \\ m_0 \rightarrow 0, \\ E = c|p| \end{array} \right.$

## 6.4 Transformationsverhalten der Ströme und Felder

Ziel: Ko-/Kontравариante Formulierung d. Elektrodynamik im Vakuum

Motivation/Grund: Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Kontinuitätsgl. für Ladungserhaltung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = 0$$

in 4er-Schreibweise:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{(j^\mu) := (\rho, \underline{j})} \quad \underline{4\text{-Stromdichte}}$$

(Erinnerung:  $\underline{j} = \underline{g} \circ$ )

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten.

$(j^\mu)$  muss wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprod.

$\partial_\mu j^\mu$  Lorentz-invariant ist:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) & \text{bzw.} & & t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2} x^1) & \beta &= \frac{v}{c} \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) & & & x' &= \gamma(x^1 - vt) & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'^2 &= x^2 & & & & & & \\ x'^3 &= x^3 & & & & & & \end{aligned}$$

Also gilt auch für Ladungs- u. Stromdichten:

$$\boxed{\begin{aligned} j'^0 &= \gamma(j^0 - \beta j^1) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - \beta j^0) \end{aligned}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} \rho' &= \gamma(\rho - \frac{v}{c^2} j^1) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - v\rho) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} j'^2 &= j^2 \\ j'^3 &= j^3 \end{aligned}$$

(Für  $v \neq 0$  "mischt" die Lorentz-Transf. Ladungsdichte u. Kompon. d. Stromdichten)

Der 4-Gradient  $(\partial_\mu) := \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

transformiert bei Lorentz-Transform. kovariant (wie  $x_\mu$ ):

$$(\partial^\mu) := \left( \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right)$$

d' Alembert-Operator durch ko-/kontra-variant. Grad. ausgedrückt:

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\partial_\mu \partial^\mu$$

[div] [grad]

$$\boxed{\square = -\partial_\mu \partial^\mu}$$

## 4-Potenziale

Die elektrodyn. Potentiale  $\Phi, \underline{A}$  sind (in der Lorenz-Eichung  $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0$ ) Lösungen von

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} = \mu_0 \underline{j} \end{array} \right\} \quad (\text{mit } \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \partial^\mu \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0 c} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu (c \underline{A}^i) = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^i \end{array} \right.$$

Also

$\partial_\mu \partial^\mu \Phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$

mit

$\begin{array}{l} \Phi^0 := \Phi \\ \Phi^i := c A^i, \quad i=1,2,3 \end{array}$

Da  $(j^\mu)$  ein 4-Vektor ist, muss auch  $(\Phi^\nu)$  wie ein 4-Vektor transformieren, da  $\partial_\mu \partial^\mu$  Lorentz-invariant ist:

$$\begin{array}{l} \Phi'^0 = \gamma (\Phi^0 - \beta \Phi^1) \\ \Phi'^1 = \gamma (\Phi^1 - \beta \Phi^0) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} \Phi^1 = \gamma (\Phi^0 - \beta \Phi^1) \\ A'^1 = \gamma (A^1 - \frac{v}{c^2} \Phi^0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Phi'^2 = \Phi^2 \\ \Phi'^3 = \Phi^3 \end{array}$$

Zurück zur Lorenz-Eichung:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0 \iff \boxed{\partial_\mu \Phi^\mu = 0} \quad \text{Lorentz-invariant}$$

$\parallel$   
 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$\Rightarrow$  Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant!  
(im Gegensatz zur Coulomb-Eichung)

Eichtransformation mit skalarer Fkt.  $\varphi$ :

(Erinnerung: so, dass Maxwell-Gl. u. Felder  $\underline{E}, \underline{B}$  unverändert)

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\underline{A}} = \underline{A} + \underline{\nabla} F \\ \tilde{\Phi} = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \tilde{\Phi}^i = c \tilde{A}^i = c A^i + \partial_i (c F) \\ \tilde{\Phi}^0 = \Phi^0 - \partial_0 (c F) = \Phi^0 - \partial^0 (c F) \end{array} \quad (i=1,2,3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\Phi}^\mu = \Phi^\mu + \partial^\mu \varphi}$$

mit beliebiger (Lorentz-invar.), differenzierbarer, skalarer Fkt.  $\varphi(x^\mu)$  des 4-Vektors  $(x^\mu)$

$$= -c \Gamma$$

Ausblick:

### Feld-Tensor

Felder  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  folgen per Diff.-op. aus  $\phi$  und  $\underline{A}$ :

$$\begin{cases} \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \\ \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \end{cases}$$

→ Naheliegende Definition eines Feld-Tensors (Verhalten unter Lorentz-Transf. vgl. metrischer Tensor):

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu, \quad (\partial^\mu) \text{ 4-Gradient}$$
$$(\phi^\nu) = (\phi, c\underline{A}) \text{ 4-Potenzial}$$