

English Summary:

Magnetic multipoles

monopole $\underline{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \equiv 0$

dipole $\underline{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r}$, $\underline{m} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}'))$ magn. dipole moment

pot. energy $V = -\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})$ $\underline{m} = \frac{q}{2m} \underline{L}$ (\underline{L} orbital angular momentum)

Law of induction: $-U_{ind} = \oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi$, $\Phi := \int \underline{B} \cdot d\underline{f} = \oint \underline{A} \cdot d\underline{s}$ magn. flux

$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \text{rot } \underline{E} \cdot d\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \underline{B} \cdot d\underline{f}$ Stokes

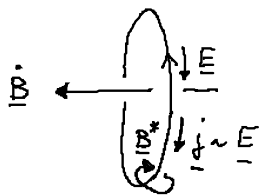
Im Ruhesystem des Leiters (F fest) gilt:

$\int_F d\underline{f} (\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}) = 0$ für beliebige Fläche F

$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}}$ differentielle Form des Induktionsgesetzes

Für nichtstationäre Vorgänge ist \underline{E} ein Wirbelfeld!

Lenz'sche Regel:



$\dot{\underline{B}} \Rightarrow \underline{E}$ induziert ($\text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

$\underline{E} \Rightarrow$ Ladungsbewegung $\Rightarrow \underline{j} \sim \underline{E}$

$\underline{j} \Rightarrow \underline{B}^*$ erzeugt ($\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \underline{B}^* = \underline{j}$)

Also: \underline{B}^* ist \underline{B} entgegengerichtet!

3.2 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Bisher: $\epsilon_0 \text{div } \underline{E} = \rho$ (Gauss / Coulomb) El. statik

$\text{div } \underline{B} = 0$

$\text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$ (Faraday) Induktionsgesetz

$\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ (Ampère) Magnetostatik

Maxwell's Ergänzung des Ampère'schen Durchflutungsgeetze für nichtstationäre Vorgänge:

$$\text{Aus } \mu_0 \text{div } \underline{j} = \text{div rot } \underline{B} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \equiv 0$$

folgt ein Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung für Ladung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$$

Ansatz: $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_0)$ Kontin.gl.

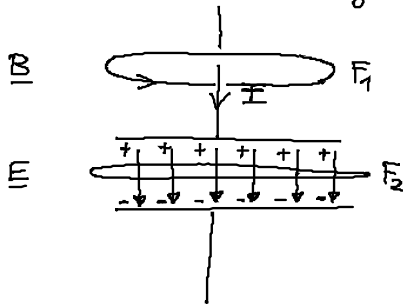
mit $\text{div } \underline{j}_0 = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{div rot } \underline{B}}_0 - \text{div } \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \text{div } \dot{\underline{E}}$

Setze also

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \underline{B} = \underline{j} + \epsilon_0 \dot{\underline{E}}}$$

\downarrow \downarrow
 Leitungs- Maxwell'sche
 stromdichte Verschiebungstromdichte
 (Konvektion)

Veranschaulichung des Verschiebungstromes:



Anfladen eines
Plattenkondensators
(nichtstationär)

$$\underbrace{\int_{F_1} \text{rot } \underline{B} \cdot d\underline{f}}_{\text{I}} = \mu_0 \underbrace{\int_{F_1} \underline{j} \cdot d\underline{f}}_{\text{I}}$$

(außerhalb der Platten
kein elektr. Feld!)

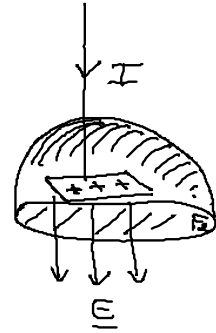
$$\oint_{\partial F_1} \underline{B} \cdot d\underline{s} = 2\pi r B$$

Ohne den Verschiebungsstrom würde sich B beim Übergang von F_1 nach F_2 abrupt auf Null ändern! (Zwischen den Kondensatorplatten kein Strom)

Mit Verschiebungsstrom:

$$\int_{F_2} \underline{H} \cdot d\underline{f} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{F_2} \dot{\underline{E}} \cdot d\underline{f} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int_{F_2} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$

(schließe die Fläche F_2 außerhalb des Kondensators)



Wegen der Ladungserhaltung $\frac{\partial Q}{\partial t} = I$ ändert sich B dann stetig:

$$2\pi r B = \mu_0 I = \mu_0 \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Vollständige Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

Mit den neuen Feldgrößen

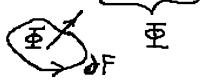
$$\underline{D}(\underline{x}, t) := \epsilon_0 \underline{E}(\underline{x}, t) \quad \text{„dielaktische Verschiebung“}$$

$$\underline{H}(\underline{x}, t) := \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{x}, t) \quad \text{„Magnetfeld“}$$


ergibt sich die differenzielle Form:

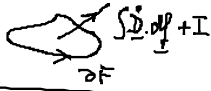
$\text{rot } \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$	}	homogene Maxwell-Gln.: Wechselwirkung einer Probe- ladung mit geg. Feldern $\underline{E}, \underline{B}$
$\text{div } \underline{B} = 0$		
$\text{div } \underline{D} = \rho$	}	inhomogene Maxwell-Gln.: Erzeugung der Felder $\underline{D}, \underline{H}$ durch gegebene Ladungen u. Ströme
$\text{rot } \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j}$		

Integralform:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}$$


$$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

$$\oint_{\partial V} \underline{D} \cdot d\underline{f} = Q$$


$$\oint_{\partial F} \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_F \underline{J} \cdot d\underline{f} + I$$


Zirkulation des el. Feldes entlang einer geschlossenen Linie = zeitliche Abnahme des eingeschloss. magn. Flusses Φ

Fluss der magn. Induktion durch geschlossene Fläche (∂V) = 0

Fluss des el. Feldes durch ∂V = eingeschlossene Ladung Q / ϵ_0

Zirkulation des magn. Feldes entlang einer geschlossenen Linie = diel. Verschiebungsstrom + Konvektionsstrom I