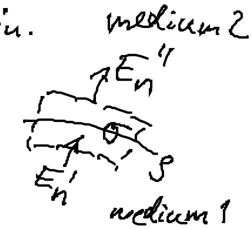
English Summary:

1) El. conductors:

- $\phi(\underline{r}) =$ const. inside (zero)
- interface cond. $\Leftrightarrow$ medium 2 is equipot. surface (medium 1)
- surface charge determined by normal-comp. discontin. of $\underline{E}$ at the interface:

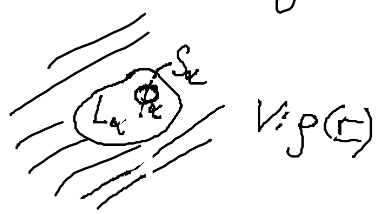


$$\underline{E}(\underline{r})\big|_S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n} \Leftrightarrow E_n'' - E_n' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})\big|_S$$

(E_t continuous at S)

2) 1st main task of electrostatics w. cond. L_α, $\alpha = 1,\dots,n$ (surfaces S_α, potentials ϕ_α) in outer space V: charge density $\rho(\underline{r})$:

boundary value problem (Dirichlet):



find sol. of $\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{-\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

w. b.c. $\begin{cases} \phi(\underline{r})\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha \\ \lim\limits_{r\to\infty} \phi(\underline{r}) = 0 \end{cases}$ (charge Q_α at cond. L_α)

$$\text{Sol. } \phi(\underline{r}) = \underbrace{\int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')}_{\text{inhom. w. hom. b.c.}} + \underbrace{\varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\text{hom. w. inhom. b.c.}}, \quad (*)$$

$G(\underline{r}-\underline{r}')$ solves $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{-1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

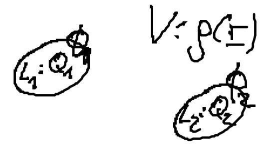
w. b.c. $\begin{cases} G(\underline{r}-\underline{r}'),\ \underline{r}' \in V,\ \underline{r} \in S_\alpha \\ \lim\limits_{r\to\infty} G(\underline{r}-\underline{r}') = 0 \end{cases}$

$$\text{charges } Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} \underbrace{df\,\sigma}_{\varepsilon_0 d\underline{f}\cdot\underline{E}} = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\phi$$

2. Grundaufgabe Elektrostatik mit Leitern

geg.: Leiter L_α, $\alpha=1,\dots,n$, Oberflächen S_α und Lad. Q_α
im Außenraum V mit Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$

ges.: $\Phi(\underline{r})$, Φ_α



Lsg.: Führe Problem zurück auf Aufg. #1
durch Zshang zw. Q_α und Φ_α:

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\Phi_\beta \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,n)$$

mit sog. Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis:

$$Q_\alpha = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\Phi \qquad \Big/ \text{Lsg. (*) für } \Phi(\underline{r}) \text{ eins.}$$

$$= -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}') \qquad \Big/ \text{Gaußscher Integralsatz}$$

$$-\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \sum_{\beta=1}^{n} \underset{\text{Konst.}}{\Phi_\beta} \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\varepsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')=0 \text{ für } \underline{r}\in L_\alpha,\ \underline{r}'\in V \text{ (Außenraum)}} \rho(\underline{r}')$$

$$-\sum_{\beta=1}^{n} \Phi_\beta \underbrace{\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=:-C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\Phi_\beta$$

Aus Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$ folgt

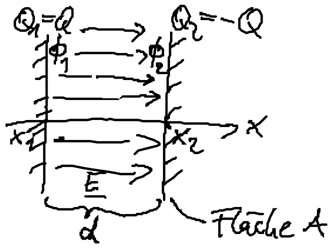
$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$$

Einheit d. Kapazität: $1\,F = 1\,\frac{C}{V}$ (1 Farad) (M. Faraday, 1791–1867)

Betrachte speziell einzelnen Leiter mit ϕ_L als Pot.:

$$C = \frac{Q}{\phi_L} \qquad \text{(Selbst-) Kapazität des Leiters}$$

<u>Bsp.</u>: Plattenkondensator



$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 \end{aligned}\right\} \; C_{12} = C_{21} =: C'$$

u. wg. Symm. $1 \leftrightarrow 2$:

$$C_{11} = C_{22} =: C$$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Q &= C\phi_1 + C'\phi_2 \\ -Q &= C'\phi_1 + C\phi_2 \\ \hline 0 &= (C + C')(\phi_1 + \phi_2) \Rightarrow C' = -C, \end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \qquad (1)$$

El. Feld:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 E = \text{const.} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = -Ex + \phi_0$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = -E\underbrace{(x_1 - x_2)}_{-d} \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt: $\boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ed} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$

Betrachte Lsg. d. 2. Grundaufg.: Inverse d. Kapazitätsmatrix

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \underset{\left(\neq \frac{1}{C_{\alpha\beta}}\right)}{\underset{\uparrow}{(C^{-1})_{\alpha\beta}}} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lsg. d. 1. Grundaufg. liefert $\phi(\underline{r})$ für vg. Q_β, $\rho(\underline{r})$.

Energie des Feldes im Außenraum V, <u>ohne</u> Raumlad.dichte ($\rho = 0$):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \, (E(\underline{r}))^2$$

Für differentielle Änderung d. RB auf L_α,

$$\begin{cases} Q_\alpha \to Q_\alpha + \delta Q_\alpha \\ \phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha, \end{cases}$$

Lsg. $\phi(\underline{r}) \to \phi(\underline{r}) + \delta\phi(\underline{r})$

Räuml. Anordnung unverändert $\to$ $\underline{\nabla}$ u. δ können vertauscht w.

$$\delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \; 2 \underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{-\underline{\nabla}\phi(\underline{r})} \cdot \delta \underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r \, (\underline{\nabla}\phi(\underline{r})) \cdot \delta\underline{E}(\underline{r}) \qquad \Big| \underline{\nabla}\phi \cdot \delta\underline{E} = \underline{\nabla}\cdot(\phi\delta\underline{E}) - \phi\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{E}}_{=\delta(\underline{\nabla}\cdot\underline{E}) = 0 \text{ in } V \text{ da } \rho(\underline{r}) \overset{!}{=} 0}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r \, \underline{\nabla}\cdot(\phi\delta\underline{E}) \qquad \Big| \text{Gauß'scher Int.-satz, VZ wg. } \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$$

$$= \varepsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot (\phi(\underline{r})\delta\underline{E}(\underline{r})) \qquad \Big| \phi\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$$

$$= \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \delta\underline{E} \qquad \Big| \varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q_\alpha$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha \delta Q_\alpha \qquad \Big| Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta} \delta\phi_\beta$$

$$\overset{\text{Symm.}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Big\{ C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\delta\phi_\beta + \underset{\overset{\shortparallel}{C_{\alpha\beta}}}{C_{\beta\alpha}}\phi_\beta\delta\phi_\alpha \Big\}$$

$$= \delta\Big\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta\Big\}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta \qquad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1 Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungsträger $\to$ el. Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

Experimentelle Erfahrung: Erhaltung der el. Ladung

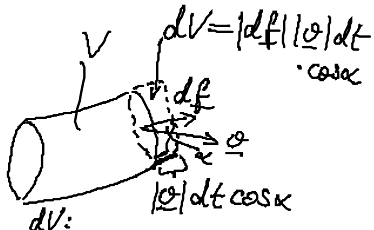
$$Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$$

→ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} := \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta J$$

$$\delta J = \frac{\rho\, dV}{dt} = \rho\, \frac{|\underline{v}|\,dt\,|d\underline{f}|\cos\alpha}{dt}$$

$$= \rho\, \underline{v}\cdot d\underline{f}$$



dV: (Änderung d. Volumens mit Ladungsträgern)

(Ladung, die pro Zeit durch $d\underline{f}$ aus V herausströmt)

El. Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$ (lokale Größe)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = -\int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} \quad \text{für belieb. } V$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgl.}$$

lokaler Erhaltungssatz

speziell: stationäre Ladungsverteilung ⇒

$\operatorname{div}\underline{j} = 0$ (⇏ nicht notwendig $\underline{j} = 0$)

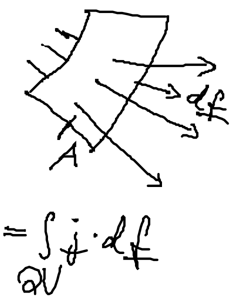
quellenfreie Stromdichte

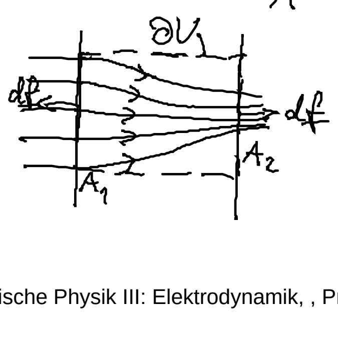
⌈ Allg. Struktur Kontinuitätsgl. z.B. für Masse (Hydrodyn.), Energie (keine Dissipation), Impuls, Wahrscheinlichkeit (QM)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}\underline{j} = 0, \quad \underline{j} = \rho\,\underline{v}$$
⌊

Stationäre Ladungsverteilung, $\operatorname{div}\underline{j} = 0$:

Strom $J = \int_A \underline{j}\cdot d\underline{f}$





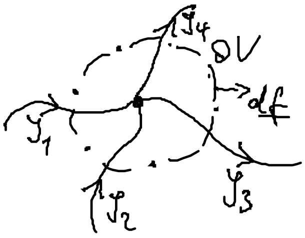
$$0 = \int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} = \oint_{\partial V} \underline{j}\cdot d\underline{f}$$

$$= \int_{A_1} d\vec{f} \cdot \vec{j} + \int_{A_2} d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

$$= \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$$

$\Rightarrow \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ (Strom konstant)

- Kirchhoff'sche Knotenregel:



$$0 = \int_V d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{j} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

$$= -\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4$$

oder

$$\boxed{\sum \mathcal{J}_{in} = \sum \mathcal{J}_{out}}$$