

English Summary:

Lagrange fct. $L = \frac{m}{2} v^2 + q(\underline{v} \cdot \underline{A} - \phi) \Rightarrow \underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Lorentz force

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A}(\underline{r}, t) - \underline{\nabla} \phi(\underline{r}, t)$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}, t)$$

\Rightarrow homogeneous Maxwell's eqs. satisfied

energy balance: $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}$

energy density $w = \frac{1}{2}(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$

energy flux density $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ (Poynting vector)

power density $\sigma = -\underline{j} \cdot \underline{E}$ (lost power)

Anwendung: Beschleunigung von Teilchen durch $\underline{E}, \underline{B}$:

Kraft auf die Ladung q : $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte: $\underline{f} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf Ladungsdichte q :

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = \underbrace{q \underline{v} \cdot \underline{E}}_{\underline{f} \cdot \underline{v}} + \underbrace{q \underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{B})}_0 = \underline{j} \cdot \underline{E}$$

vom Feld auf Ladungen übertragen
(= Verlustdichte der Feldenergie)

(Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\underline{F} \perp \underline{v}$)

Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße!

1. Beispiel: Ohm'sches Gesetz $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ mit konst. Leitfähigkeit
 $\sigma > 0$

(phänomenolog. Materialgesetz!)

gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder \underline{E})

\Rightarrow Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\sigma \underline{E}^2 < 0$

d.h. stets Verlust von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodyn.)

\underline{E} -Dynamik ist zeitunabhängig



Ohm'sches Gesetz nicht zeitumkehrinvariant

$$t \rightarrow -t$$

$$\underline{j} \rightarrow -\underline{j}$$

aber $\underline{E} \rightarrow \underline{E}$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert
(Irreversibilität!)

2. Beispiel: Antennenabstrahlung (offenes System)

\underline{j} in der metallischen Antenne ist
dem Wechselfeld \underline{E} außerhalb der

Antenne entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$

\Rightarrow Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl.

für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B}) = \underbrace{\underline{D} \times \underline{B}}_{\nabla \times \underline{H} - \underline{j}} + \underbrace{\underline{D} \times \dot{\underline{B}}}_{-\nabla \times \underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\nabla \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B} - \epsilon_0 \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\begin{aligned} \underline{B} \times (\nabla \times \underline{B}) &= \frac{1}{2} \nabla (\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} \\ &= \nabla \cdot \left\{ \underline{1} \frac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} + \underbrace{\underline{B} (\nabla \cdot \underline{B})}_0 \end{aligned}$$

wobei $\underline{1}$ der Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B} \otimes \underline{B}$ das Tensorprodukt (dyadisches Produkt)

und $\nabla \cdot \{ \dots \}$ die Divergenz eines Tensors \underline{T} 2. Stufe
ist.

(In Komponenten $(\underline{B} \otimes \underline{B})_{ij} := B_i B_j$)

$$(\nabla \cdot \underline{T})_\beta := \partial_\alpha T_{\alpha\beta} \quad (\text{Einsteinkonvention!})$$

Analog: $\underline{E} \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{E}) - \underline{E} \otimes \underline{E} \right\} + \underline{E} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{E})}_{\rho/\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B}) + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2) - \epsilon_0 \underline{E} \otimes \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \otimes \underline{B} \right\}$$

$$= - (\underline{g} \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$$

Kraftdichte \underline{f} , die von den Feldern auf Ladungsdichte ρ u. Stromdichte \underline{j} ausgeübt wird

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underline{g} + \nabla \cdot \underline{T} = -(\underline{g} \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})} \quad \text{Bilanzgl. für Impulstransport}$$

mit $\underline{g} := \underline{D} \times \underline{B}$ Impulsdichte des Feldes

(Nach Newton $\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{T} := \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - \underline{E} \otimes \underline{D} - \underline{B} \otimes \underline{H}$$

Impulsstromdichte-Tensor des Feldes

(Maxwell'scher Spannungstensor)

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

(Stromdichte in α -Richtung der β -Komponente der Impulsdichte)

$$\text{Sp } \underline{T} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) = w \quad (\text{Energiedichte})$$

\underline{T} ist symmetrisch: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$

beschreibt Impuls austausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen

Bem. : Eine analoge Bilanzgl. gilt für die Drehimpulsdichte des Feldes, sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen.

3.6 Eichinvarianz

Darstellung der Felder $\underline{E}, \underline{B}$ durch $\phi(\underline{r}, t), \underline{A}(\underline{r}, t)$:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

Frage : allgemeine Trafo $\phi \rightarrow \phi', \underline{A} \rightarrow \underline{A}'$, welche $\underline{E}, \underline{B}$ invariant lässt?

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \stackrel{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}' \\ \underline{B} &= \underline{\nabla} \times \underline{A} \stackrel{!}{=} \underline{\nabla} \times \underline{A}' \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

($\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}G \equiv 0$)

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \stackrel{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\underline{A} + \underline{\nabla}G)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G) = 0$$

$$\Rightarrow \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t) \text{ unabh. von } \underline{r}$$

$$\text{Mit } F(\underline{r}, t) := G(\underline{r}, t) - \int_{t_0}^t dt' g(t')$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r}, t) &= \underline{A}(\underline{r}, t) + \underline{\nabla}F(\underline{r}, t) \\ \phi'(\underline{r}, t) &= \phi(\underline{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

mit beliebiger
Eichfkt. $F(\underline{r}, t)$

physikal. relevant: $\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{A} = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} = \Phi$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}, \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ sind die homog. Maxwell-glm. erfüllt

$$(\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi}_0 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} \times \underline{A}}_{\underline{B}}, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = 0)$$

Umkehrung:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} : \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \phi : \underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

Wähle nun Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gln. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der Dgl. für \underline{A} und ϕ

(i) Lorenz-Eichung (Ludwig V. Lorenz, dän. Physiker, 1867)

↑
Henrik A. Lorentz, holl. Physiker

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

Hiermit werden die Feldgln. entkoppelt

$$a) -\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\Delta \phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}$$

$$b) \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \underline{j}$$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \underline{A})}_{\nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \underline{j}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$\Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t})}_{0 \text{ Lorenz-Eichung}} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\boxed{\Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \underline{j}}$$

Zus. fassung mit d'Alembert-Op. $\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}$$

inhomogene
Wellengln.

(entkoppelt!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.994 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \underline{\text{Lichtgeschwindigkeit}}$$

(= Ausbreitungsgeschwindigkeit el. mag. Wellen
im Vakuum)