

English Summary: Electrostatics

$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$

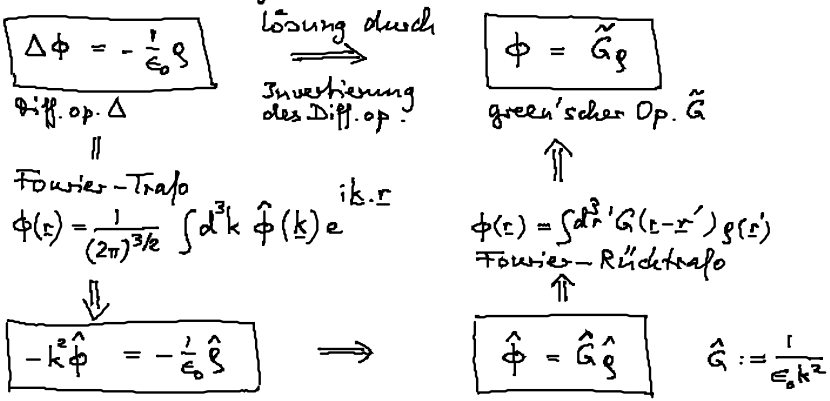
 $\Leftrightarrow$ 

$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$   
 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

 $\Leftrightarrow$ 
 $\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}')$   
 $\Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi \Leftrightarrow \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ 

Poisson eq.  
 sol. by Green's fct:  $\Delta_r G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$   
 $\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$   
 for boundary cond.  $\phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ :  $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

Abstraktes Lösungsschema:



1.4 Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r}')$  in der Umgebung von  $\mathbf{r}'=0$



Frage: asymptotisches Verhalten von  $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für  $r \gg r'$ :

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla_r)^l G(\mathbf{r})$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int d^3r' (\mathbf{r}' \cdot \nabla_r)^l G(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')$$

explizit mit  $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  Entwicklung:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2\frac{\mathbf{r}}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Durch die für  $r' < r$ ,  $|\xi| < 1$   
 konvergente Reihe:



$$\underbrace{\left(1 - 2\frac{r'}{r}\xi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2}}_{\text{Erzeugende}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\xi)$$

sind die Legendre-Polynome  $P_l(\xi)$  definiert

$$P_l(\xi) = \frac{1}{l!} \left[ \frac{\partial^l}{\partial t^l} (1 - 2t\xi + t^2)^{-1/2} \right]_{t=0}$$

insbesondere  $P_0(\xi) = 1$

$$P_1(\xi) = \xi = \cos \theta$$

$$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos(2\theta) + 1)$$

also

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' g(r') \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l r^{-l-1}$$

mit  $Q_l = \int d^3r' r'^l g(r') P_l(\cos \theta)$  „ $2^l$ -Pol“

Entwicklung nach Potenzen von  $r$ !

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ( $r' \ll r$ )  
 konvergiert die Reihe schnell:

$l=0$ :  $\phi^{(0)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$   $Q_0 = \int d^3r' g(r')$  el. Monopol  
 (Gesamtladung)

fällt am langsamsten ab  
 $\Rightarrow$  Ladungsverteilung wirkt in großer  
 Entfernung wie Punktladung



$l=1$ :  $\phi^{(1)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \underline{r}}{r^3}$   $Q_1 = \int d^3r' g(r') \underbrace{r' \cos \theta}_{\frac{r' \cdot \underline{r}}{r}} = \frac{P \cdot \underline{r}}{r}$   
 $P := \int d^3r' g(r') \underline{r}'$

(el. Dipolmoment)

fällt  $\sim \frac{1}{r^2}$  ab,

wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper  
( $Q_0 = 0$ )



Beispiel: 2 Punktladungen  $q, -q$  bei  $r_1, r_2$

$$\rho(r') = q [\delta(r' - r_1) - \delta(r' - r_2)]$$

$$Q_0 = 0, \quad p = q(r_1 - r_2) = qd$$

Feld des Dipolpotenzials:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{P_k x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3x_i P_k x_k}{r^5} - \delta_{ik} \frac{P_k}{r^3} \right)$$

(Summationskonv. !)

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(p \cdot r) r - r^2 p]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

$$l=2: \phi^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') (r')^2 (3\cos^2\theta - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') \left( 3 \frac{r'_i r'_i}{r'^2} \frac{r'_j r'_j}{r'^2} - r'^2 \right)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2r^2} \int d^3r' \rho(r') (3x'_k x'_k - r'^2 \delta_{kl}) x_k x_l$$

$Q_{kl}$  el. Quadrupolmoment

(spurfrees, symm. Tensor:

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3r' \rho(r') (3(r')^2 - 3(r')^2) = 0$$

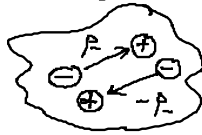
es ex. orthogonale Koord. trafo  
auf Diagonalforn:  $Q_{kl} = 0$  ( $k \neq l$ )

$$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

$\Rightarrow$  nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} Q_{kl} x_k x_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cdot Q \cdot r}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Beispiel: 2 entgegengerichtete Dipole:



### 1.5 Elektrostat. Feldenergie

Kraft  $\underline{F}(\underline{r}) = q \underline{E}(\underline{r}) = -q \nabla \phi(\underline{r})$

$\Rightarrow V(\underline{r}) = q \phi(\underline{r})$  ist pot. Energie einer Ladung  $q$  im Feld  $\underline{E}(\underline{r})$

$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$  pot. Energie der Ladung  $q_i$  bei  $\underline{r}_i$  im Pot. der Ladung  $q_j$  bei  $\underline{r}_j$

gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen  $q_1, \dots, q_N$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\underline{r} \int d^3\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\underline{r} \phi(\underline{r}) \rho(\underline{r})$$

$$\begin{aligned} \rho(\underline{r}) &= \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\underline{r} \phi(\underline{r}) \nabla \cdot \underline{E} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int d^3\underline{r} \nabla \cdot (\phi \underline{E}) - \int d^3\underline{r} (\nabla \phi) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_{S_{\infty}} \underbrace{\phi \underline{E}}_{\substack{\text{Gauß} \\ \underbrace{\int_{\Gamma'} \phi \underline{E}}_{\substack{\sim \frac{1}{r^2} \\ \sim \frac{1}{r^2}}}}} + \int d^3\underline{r} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right] \\ &= \int d^3\underline{r} w(\underline{r}) \end{aligned}$$

Energiedichte des el. Feldes  $w(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}))^2$

Selbstenergie einer Pkt.ladung

$$|\underline{E}(r)| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$\text{Gesamtenergie } W = \int d^3r w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \underbrace{4\pi \int_0^\infty dr r^2}_{\frac{1}{r} (r=0) \rightarrow \infty} \frac{1}{r^4}$$

Begriff der Punktladung ist im Widerspruch  
zum feldtheoret. Begriff der Energiedichte !