

English Summary:

Dipole radiation: $r \gg a$ extension of source
 $\lambda \gg a$ neglect relative retardation inside source

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{el. dipole moment } \underline{p} = \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', t - \frac{r}{c})$$

Hertz dipole $\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$

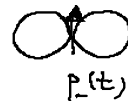
$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)}$$

$kr \gg 1$ far field $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$kr \ll 1$ near field $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t)$

Poynting vector
(energy flux density)

$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



Magn. Dipol-, el. Quadrupolstrahlung

Die niedrigste Ordnung der Multipolentw. von $\underline{A}(\underline{r}, t)$ verschwindet für quellenfreie Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}', \tau)$:

$$\nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\underline{r}', \tau) = 0 \Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r' \underline{r}' \dot{\underline{j}} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0 \quad \text{in el. Dipolnäherung, keine Abstrahlung!}$$

Beispiel: geschlossene Leiterschleife $\vec{I}(t) = I_0 e^{-i\omega t}$
(Rahmenantenne)

2. Ordnung

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

$$\text{Mit } (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{r}']$$

und $\nabla_{r'} \cdot \{x'_k(\underline{r}, \underline{r}') \underline{j}\} = \underbrace{[(\underline{r}, \underline{r}') j_k + x'_k(\underline{r}, \underline{r}')]}_{\dots} + \underbrace{x'_k(\underline{r}, \underline{r}') \nabla_{r'} \cdot \underline{j}}_{-\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r}', t)}$

bzw. integriert

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \nabla_{r'} \cdot \{x'_k(\underline{r}, \underline{r}') \underline{j}\}}_0 \text{ (Gauß)} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' [(r_k r'_j + (r'_j) r'_k)] - \int d^3 r' (r_k r'_j) \rho(\underline{r}', t) \dots$$

folgt

$$\int d^3 r' (r_k r'_j) \underline{j}(\underline{r}', t) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int d^3 r' [r'_j x'_k(\underline{r}', t)] \right]}_{\underline{m}(t) \text{ magn. Dipolmoment}} + \frac{1}{2} \int d^3 r' (r_k r'_j) \rho(\underline{r}', t)$$

El. Quadrupolmoment - Tensor :

$$\underline{\underline{Q}}(t) = \int d^3 r' \rho(\underline{r}', t) (3 \underline{r}' \otimes \underline{r}' - r'^2 \underline{1}) =: \underline{\underline{\tilde{Q}}} - \frac{1}{3} (\text{Sp } \underline{\underline{\tilde{Q}}}) \underline{1}$$

falls $\underline{\underline{\tilde{Q}}}(t)$ osz.: „breathing mode“

⇒ kein Beitrag zu \underline{E} , \underline{B}

(verschwindet durch Eich-Transform!)



$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{r} = 3 \int d^3 r' \rho(\underline{r}', t) \underline{r}' (\underline{r}' \cdot \underline{r})$$

$$\Rightarrow A^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\underline{m}(t) \times \underline{r} + \frac{1}{6} \underline{\underline{\dot{Q}}}(t) \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{r^3} \underline{m} \times \underline{r} + \frac{1}{c r^2} \dot{\underline{m}} \times \underline{r} \right]}_{\text{magn. Dipol-Strahlung}} + \underbrace{\left[\frac{1}{6 r^3} \underline{\underline{\dot{Q}}} \underline{r} + \frac{1}{6 c r^2} \underline{\underline{\ddot{Q}}} \underline{r} \right]}_{\text{el. Quadrupol-Strahlung}} \right\}$$

$$A_m^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right]$$

magn. Dipolstrahl.

skalares Pot. aus Lorenz - Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -c^2 \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{ab dA}$$

Felder in Fernfeldnäherung:

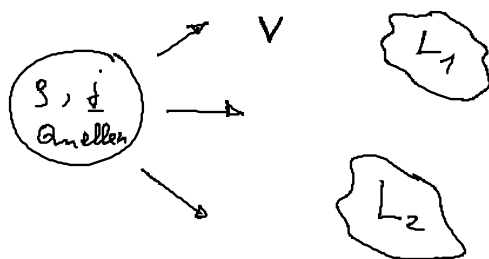
$$\underline{B}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} [\ddot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r}] \times \underline{r} \quad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{el.Q}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{Q}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad (\quad " \quad)$$

$$\underline{E} = c(\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r}) \quad \text{wie für el. Dipolstrahlung}$$

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagn. Wellen bei
geg. lokalisierten Quellen $\rho(\underline{r}, t)$
und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und vorgegebenen Leitern L_α
im Vakuum.



Ziel: Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V

Anwendung: Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4 \text{ m}$)

Radar

Optik ($\lambda \sim 400 - 800 \text{ nm}$) \rightarrow Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomogenen Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \text{Lorenzgleichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und Randbed. auf L_∞
sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahl. bed.)

Annahme: $\rho(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}) e^{-i\omega t}$
 $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$ } oBdA wegen
Fourierzerlegung
(period. Erregung)

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$$

eingesetzt in die Wellengl. $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2) \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \text{mit } k := \frac{\omega}{c}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$:

$$\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t')$$

$$\text{allg. L\u00f6s. } \phi(\underline{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \rho(\underline{r}', t') / \epsilon_0$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') e^{-i\omega t'} \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\left(\int_0^\infty dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t') e^{i\omega t'} \right)}_{=: \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')} e^{-i\omega t} \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ &=: \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}$$

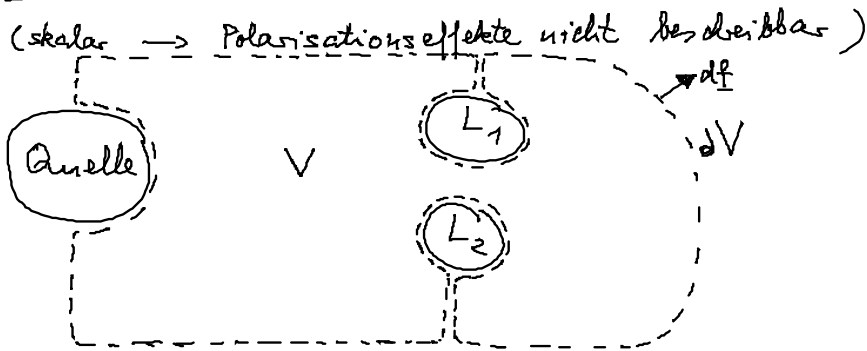
period. Zeitabhängigkeit abseparieren:

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') / \epsilon_0$$

mit $(\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Problem: Randbedingungen für ϕ, \underline{A} sind im nichtstet. Fall nicht bekannt, sondern müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Skalare Kirchhoff - Identität



Green'scher Satz: $\int_{\partial V} d\underline{f} (\phi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \phi) = \int_V d^3r (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)$

Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$, $\phi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$ sei Lösung:

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f} (\phi \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{\nabla}_r \phi) = \int_V d^3r (\underbrace{\phi \Delta \tilde{G}}_{-\delta(\underline{r}-\underline{r}') - k^2 \tilde{G}} - \underbrace{\tilde{G} \Delta \phi}_{-\frac{\rho}{\epsilon_0} - k^2 \phi})$$

$= -\phi(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \int_{\partial V} d\underline{f} [\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{\nabla}_r \phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r}) \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')] \quad \text{mit } \underline{r}' \in V$$

Pot. $\phi(\underline{r}')$ im Inneren von V ist durch ϕ und $\underline{\nabla} \phi$ auf dem Rand festgelegt, falls die Greenfkt. \tilde{G} bekannt ist.