

English Summary:

Inhomogeneous Maxwell's eqs.:

(4-divergence)

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^{\nu}$$

Relativistic Hamilton's Principle

$$\delta W = \delta \int_1^2 \left\{ -m_0 c ds - \frac{q}{c} \phi^{\mu} dx_{\mu} \right\} = 0$$

free Lagrangian Lagrangian of
field-matter interaction

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds} p^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu}$$

$i=1,2,3$: Newton's Law $\frac{d}{dt} \underline{p} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ Lorentz force

$\mu=0$: power balance $\frac{dE}{dt} = q \underline{E} \cdot \underline{v}$

6.6 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

$$\text{Wirkungsintegral } W = \underbrace{-m_0 c \int_1^2 ds}_{W_t \text{ (Teilchen)}} - \frac{q}{c} \underbrace{\int_1^2 dx_{\nu} \phi^{\nu}}_{W_{t\phi} \text{ (Teilchen-Feld-WW)}}$$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Massendichte $\rho(x^{\nu})$:

$$W_t = -c \int_1^2 d^3x \rho \int ds = - \int_{\Omega} d\Omega \rho \frac{ds}{dt}$$

$d\Omega := d^3x dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ Volumenelement im Minkowski-Raum

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthogonalen Transformationen U^{ν}_{κ} erhalten wird.

(ii) Aus $dm_0 dx^{\nu} = \frac{\rho}{c} \frac{dx^{\nu}}{dt} \underbrace{d^3x dt}_{d\Omega} = \frac{1}{c} \rho \frac{dx^{\nu}}{dt} d\Omega$ folgt,

dass die 4-Massenstromdichte

$$\rho \frac{dx^{\nu}}{dt} \equiv j^{\nu} \text{ ein 4-Vektor ist, da } dm_0, d\Omega$$

Lorentz-Skalare (nicht Lorentz-invariant: μ, dt)

$$(iii) \quad \underbrace{\mu^2 \frac{dx^\nu dx_\nu}{dt^2}}_{g^\nu g_\nu} = \left(\mu \frac{ds}{dt} \right)^2 \text{ ist Lorentz-Invariante}$$

also auch $\mu \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow W_t$ ist Lorentz-Invariante

WW einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\rho(x^\nu)$ mit Feld:

$$\begin{aligned} W_{t\phi} &= -\frac{1}{c} \int d^3r \rho \int dx_\nu \phi^\nu \\ &= -\frac{1}{c^2} \int \underbrace{d^3r}_{d\Omega} c dt \underbrace{\rho \frac{dx_\nu}{dt}}_{j_\nu} \phi^\nu \end{aligned}$$

mit 4-Ladungsstromdichte j_ν
 $\begin{pmatrix} j^0 := \rho \frac{dx^0}{dt} = c\rho \\ j^i := \rho v^i \quad i=1,2,3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{t\phi} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_\nu \phi^\nu}$$

Also $W = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}(x^\nu)$ mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} := -\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu \quad d\Omega \equiv d^4x$$

Umrechnung

$$\tilde{\phi}^\nu = \phi^\nu + \partial^\nu \varphi$$

$$\tilde{W}_{t\phi} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_\nu \tilde{\phi}^\nu = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_\nu (\phi^\nu + \partial^\nu \varphi)$$

$$\begin{aligned}
&= W_{t_f} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \underbrace{j_\nu \partial^\nu \varphi}_{\partial^\nu(\varphi j_\nu) - \varphi(\partial^\nu j_\nu)} \\
&= W_{t_f} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \partial^\nu(\varphi j_\nu) + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \varphi(\partial^\nu j_\nu) \\
&\quad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho)}_{[\varphi \rho]_{t_1}^{t_2}} - c \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \underbrace{\nabla \cdot (\underline{\varphi} \underline{j})}_{\oint d\vec{l} \varphi \underline{j} = 0}
\end{aligned}$$

weglassen,
da Var.
bei t_1, t_2
verschwindet

$$\Rightarrow \tilde{W}_{t_f} = W_{t_f} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \varphi(\partial^\nu j_\nu) \quad 0 \text{ wegen Ladungserhaltung}$$

Fazit: Äquivalenz zwischen Gähinvarianz $\tilde{W}_{t_f} = W_{t_f}$
und Ladungserhaltung $\partial^\nu j_\nu = 0$

(tiefer Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen)

klass. Mechanik: Noether-Theorem

6.7. Inhomogene Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg.gl. für ein Teilchen im Feld $F^{\nu\kappa}$

$$\frac{d}{ds} p^\nu = \frac{q}{c} F^{\nu\kappa} u_\kappa$$

sowie die homogenen Maxwell-Gln.

$$\epsilon_{\nu\kappa\lambda\pi} \partial^\kappa F^{\lambda\pi} = 0 \quad (\text{wegen } F^{\lambda\pi} = \partial^\lambda \phi^\pi - \partial^\pi \phi^\lambda)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_t + W_{t\dot{\phi}} = \int_{\Omega} d\Omega \left\{ \underbrace{-r \frac{ds}{dt}}_{\text{Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^{\nu}}_{\text{Teilchen-Feld-WW}} \right\}$$

durch Var. der Bahn bei geg. Potenziellen $\phi^{\nu}(x^{\lambda})$.

Vermutung:

Erzeugung von Feldern durch Ladungen (d.h., die inhomog. Maxwell-Gln. ergeben sich durch Variation der Felder bzw. Pot. bei geg. Bahnen.)

Frage: Lagrange dichte \mathcal{L}_f zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ausatz: $W_f = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}_f(F^{\nu\kappa}, \phi^{\nu})$

Forderungen: (i) Feldgln. linear $\Rightarrow \mathcal{L}_f$ bilinear in $F^{\nu\kappa}, \phi^{\nu}$

(ii) Eindeutige Determinierung durch $F^{\nu\kappa}$
 \Rightarrow keine Ableitungen $\partial^{\lambda} F^{\nu\kappa}$

(iii) Eichinvarianz $\Rightarrow \phi^{\nu} \phi_{\nu}$ darf nicht auftreten

(iv) Lorentzinvarianz

$$\Rightarrow \mathcal{L}_f = -\alpha F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}$$

$$W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-r \frac{ds}{dt}}_{W_t} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^{\nu}}_{W_{t\dot{\phi}}} - \underbrace{\alpha F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}}_{W_f} \right\}$$

Variation für feste Bahn (d.h. festes j^{ν}):

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} \underbrace{j^{\nu}}_{j^{\nu} \delta \phi_{\nu}} \delta \phi^{\nu} - \alpha \underbrace{\delta(F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa})}_{\substack{(\delta F^{\nu\kappa}) F_{\nu\kappa} + F^{\nu\kappa} (\delta F_{\nu\kappa}) \\ (\delta F_{\nu\kappa}) F^{\nu\kappa}}} \right\} = 2F^{\nu\kappa} \delta F_{\nu\kappa}$$

$$\text{Mit } \delta F_{\nu\kappa} = \delta(\partial_{\nu} \phi_{\kappa} - \partial_{\kappa} \phi_{\nu}) = \partial_{\nu} \delta \phi_{\kappa} - \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu}$$

$$2F^{\nu\kappa} \delta F_{\nu\kappa} = 2F^{\nu\kappa} \partial_{\nu} \delta \phi_{\kappa} - 2F^{\nu\kappa} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu} = -4F^{\nu\kappa} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu}$$

$$\underbrace{2F^{\kappa\nu} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu}}_{\substack{\text{antisymmetrisch} \\ = -2F^{\nu\kappa} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu}}}$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^{\nu} \delta \phi_{\nu} + 4\alpha F^{\nu\kappa} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Mit dem verallgem. Gauß'schen Satz (in 4D)} \\ \int_{\Omega} d\Omega \partial_{\kappa} (F^{\nu\kappa} \delta \phi_{\nu}) = \int_{\partial\Omega} d\Gamma_{\kappa} F^{\nu\kappa} \delta \phi_{\nu} = 0 \\ \text{(3-dim. Rand des 4-dim. Vol. } \Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2], F^{\nu\kappa} \rightarrow 0 \\ \delta \phi_{\nu}|_{t_1, t_2} = 0, x^i \rightarrow \infty (i=1,2,3) \end{array} \right]$$

Wird

$$\int d\Omega F^{\nu\kappa} \partial_{\kappa} \delta \phi_{\nu} = \underbrace{\int d\Omega \partial_{\kappa} (F^{\nu\kappa} \delta \phi_{\nu})}_0 - \int d\Omega (\partial_{\kappa} F^{\nu\kappa}) \delta \phi_{\nu}$$

Also

$$\delta W = \int_{\Omega} d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^{\nu} - 4\alpha (\partial_{\kappa} F^{\nu\kappa}) \right\} \delta \phi_{\nu} \stackrel{!}{=} 0$$

für bel. $\delta \phi_{\nu}$

$$\Leftrightarrow \partial_{\kappa} F^{\nu\kappa} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \partial_{\kappa} F^{\kappa\nu} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^{\nu}$$

Wahl der Einheiten: $\alpha = \frac{\epsilon_0}{4c}$:

$$\boxed{\partial_{\kappa} F^{\kappa\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^{\nu}}$$

inhomogene Maxwell-Gln.

Interpretation der Lagrange-dichte des Feldes

$$W_f = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}_f \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_f = -\frac{\epsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa} = \frac{\epsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\kappa\nu}$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2c} (\underline{E} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{H}) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\neq u = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) \quad \text{Energiedichte}$$

$$\text{Analogie: } q, \dot{q} \quad E = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T + V$$

$$\text{(harmon. Osz. in der Mechanik)} \quad L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T - V$$

