

English Summary:

Conductors in electrostatics

charge $Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta$ $\alpha = 1, \dots, n$ capacitance coefficients $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$

field energy $W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta$

Charge continuity eq. $\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r}, t) + \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$ $\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \underline{v}(\underline{r}, t)$

Stationary current: $\operatorname{div} \underline{j} = 0 \Rightarrow$ Kirchhoff's Law $\sum I_{in} = \sum I_{out}$

Ohm'sches Gesetz

Exp. Erfahrung: $U \sim I$ in Leitern bei nicht zu hohen Spannungen
 $U = RI$ mit el. Widerstand R

lokale Form des Ohm'schen Gesetzes:

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \sigma \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \text{el. Leitfähigkeit } \sigma = \text{const.} \\ (\text{Drude})$$

Energiedissipation:

a) El. Arbeit im el. Feld: $dW = \underline{F} \cdot d\underline{s} = q \underline{E} \cdot d\underline{s}$

el. Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = q \underline{E} \cdot \underline{v}$

b) kontin. Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

El. Leistung am Volumenelement d^3r : $dP = \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r}) d^3r$

$$P = \int_V \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) d^3r \quad \text{Leistungsdichte}$$

globale Bilanz: im Feld aufgenommene Leistung

= durch Stoßprozesse an das
Kristallgitter dissipierte Leistung

(= Joule'sche Wärme)

Ohm: $\underline{E}, \underline{j} = \sigma \underline{E}^2$

gesamte Verlustleistung: $P = \int_V \underline{j} \cdot \underline{E} d^3r = IU = RI^2$

2.2 Magnetische Induktion

Experimentelle Erfahrung:

WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q , die sich mit \underline{v} bewegt:

$$\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}(\underline{r}) \quad \underline{\text{Lorentz-Kraft}}$$

$\underline{B}(\underline{r}) =$ magnet. Induktion am Ort \underline{r} , erzeugt von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad \text{Ampère-Gesetz}$$

(Analog zur Coulomb-WW: $\underline{F} = q \underline{E}(\underline{r})$
in der Elektrostatik $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$)

Einheiten (SI): $[\underline{B}] = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{C s}^2 \text{ m}^2} \frac{\text{s}}{\text{m}^2} = 1 \text{T} = 1 \text{ Tesla}$

Damit ist $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ festgelegt (nicht wie ϵ_0 frei wählbar!)

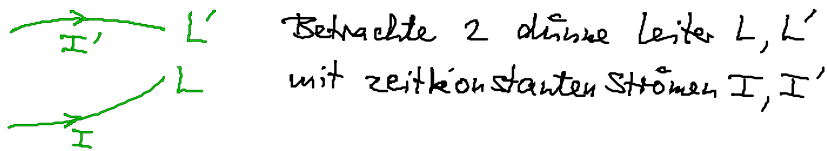
(Die magn. Induktion beschreibt keine neue, von der Coulomb-WW unabh. WW: Betrachte Transformation auf lokales Ruhesystem einer bewegten Ladung!)

Gauss-System: $\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}$, $\underline{B} = \frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$

$$[\underline{B}] = \frac{\text{dyn}}{\text{ESE}} = \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}} = 1 \text{ G} = 1 \text{ Gauß}$$

$$\underline{F} = q \underline{v} \times \frac{\underline{B}}{c} \Rightarrow 1 \text{ G}/c = 10^{-4} \text{ T}$$

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



Strom durch L' : $\underline{j} d^3r' = \rho d^3r' \underline{v}' = \rho \frac{d^3r'}{dt} d\tau' = I' d\tau'$

\Rightarrow magn. Induktion $\boxed{B(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\tau' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$ Biot-Savart-Gesetz

Kraft auf Ladung im Vol.element d^3r von L :

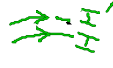

$d\underline{F} = \rho \underline{v} \times \underline{B} d^3r = \underline{j} \times \underline{B} d^3r = I d\tau \times \underline{B}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\tau \times \int_{L'} d\tau' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$ Kraft von L' auf L

Mit $d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')) = (d\underline{r} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')) d\underline{r}' - (d\underline{r} \cdot d\underline{r}') (\underline{r}-\underline{r}')$

und $\int_L d\underline{r} \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \Big|_{L\text{-Anfang}}^{L\text{-Ende}} = 0$ (L geschlossen oder L -Enden in ∞)

folgt $\boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L L'} (d\underline{r} \cdot d\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$

\Rightarrow für parallele Ströme ($I d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' > 0$) : Anziehung 
 < antiparallele " (< 0) : Abstoßung 

2.3 Magnetostatische Feldgleichungen

(gilt auch in quasistat. Näherung: zeitl. Änderung \ll räuml. Änderung)

Mit dem Vektorpotenzial

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(nicht eindeutig!)

Umkehrung $\underline{A} \rightarrow \underline{A} + \nabla \varphi$
mit bel. $\varphi(\underline{r}, t)$ möglich,
da $\nabla \times \nabla \varphi = 0$

läßt sich

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}(\underline{r})$$

schreiben.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Beweis:}} \quad \nabla \times \underline{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\nabla \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) \times \underline{j}(\underline{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B} \end{aligned}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}$ hat Vektorpotenzial

\Leftrightarrow

(ii) $\text{div } \underline{B} = 0$ $\left(\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) \equiv 0 \right)$

\Leftrightarrow

Es gibt keine Quellen der magn. Induktion
("magn. Ladungen")

$$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

Aber: "Magn. Monopole" postuliert von Dirac (1931)

zur Erklärung der Quantelung der Ladung (aus der Quantisierung des Drehimpulses). Aufgegriffen durch die vereinheitlichte Feldtheorie.

Extrem schwere magn. Monopole wurden beim Urknall innerhalb 10^{-35} s erzeugt. Umstritten:

Exp. Nachweis (?) durch supraleitende Spule

(H. Mitter: Elektrodynamik)

Zusammenhang zwischen \underline{B} und \underline{j} :
(auch nichtstationär)

$$\text{rot } \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \nabla_r \cdot \left(\frac{\underline{j}(r')}{|r-r'|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \underline{j}(r') \cdot \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|r-r'|}}_{-\nabla_{r'} \frac{1}{|r-r'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \left[\underbrace{-\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{\underline{j}(r')}{|r-r'|} \right)}_{\text{Gauß'sches Satz}} + \frac{1}{|r-r'|} \underbrace{\nabla_{r'} \cdot \underline{j}(r')}_{-\frac{\partial}{\partial t} \rho \text{ Kontinuitätsgl.}} \right]$$

$$= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S(\infty)} d\underline{f}' \cdot \frac{\underline{j}(r')}{|r-r'|} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\rho(r',t)}{|r-r'|}$$

0 für hinreichend
weit abliegendes
 $\underline{j}(r')$

$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E$

$$\Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \underline{j}(r') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|r-r'|}}_{-4\pi \delta(r-r')} = -\mu_0 \underline{j}(r,t)$$

$$\text{Also: } \boxed{\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$$

Verschiebungstromdichte
= nichtstationärer Beitrag!

Für stationäre Strom- u. Ladungsverteilungen:

$$\boxed{\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j}} \quad \text{differenzielle Form des Ampère-Gesetzes}$$

(Ströme sind die Wirbel der magn. Induktion)

Integration über Fläche F :

$$\int_F \text{rot } \underline{B} \, d\underline{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial F} \underline{B} \, d\underline{s} = \mu_0 \int_F \underline{j}(\underline{r}) \, d\underline{s}$$



I Strom durch F

$$\Rightarrow \int_{\partial F} \underline{B}(\underline{r}) \, d\underline{s} = \mu_0 I$$

Integralform (Durchflutungsgesetz)

