

## Wiederholung

Zwischenziel für Eigenwertproblem:

### QR Faktorisierung

$$\underline{X} = \underline{Q} \cdot \underline{R}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{Spalten}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Dreiecksmatrix}}$   
 $\underbrace{\quad}_{\text{orthogonale Matrix}}$

Gram-Schmidt Algorithmus

$$q_j = x_j$$

for  $i = 1, \dots, j-1$

$$r_{ij} = q_i^T \cdot x_j$$

$$q_j = x_j - r_{ij} q_i$$

$$r_{jj} = \|q_j\|^2$$

Effektiv

$$q_j = (Id - Q_{j-1} Q_{j-1}^T) q_j$$

Weiter gehts:

Algorithm

$$r_{11} = \|x_1\|_2$$

$$q_1 = \frac{x_1}{r_{11}}$$

for  $j = 2, \dots, n$

Erhalte die Vektoren  $[q_i, r_j]$  aus Gram-Schmidt Verfahren  
für  $q_1 \dots q_{j-1}$  und  $x_j$

$$q_j = q_j / r_{jj}$$

und  
Aussagen Matrizen  $Q$  und  $R$

Wann ist, dass die  $QR$  Faktorisierung? Wenn  $A$  ist Dreiecksfarm,

$$(q_1 \dots q_n) \cdot \begin{pmatrix} \|q_1\|^2 & q_1^T \cdot x_2 & q_1^T \cdot x_3 & \dots & q_1^T \cdot x_n \\ & \|q_2\|^2 & q_2^T \cdot x_3 & \dots & \\ & & & \dots & \\ & & & & \\ & & & & \|q_n\|^2 \end{pmatrix}$$

$q_n^T \cdot q_n$  ist ein Projektor auf den jeweiligen Unterraum

$x_2$  ist in  $\text{span}\{q_1\}$

$x_3$  ist in  $\text{span}\{q_1, q_2\}$

$x_j$  ist in  $\text{span}\{q_1, \dots, q_{j-1}\}$

$\rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{\underline{X}}$

Wobei die Vektoren  $x_i$  die Spaltenvektoren von  $\underline{\underline{X}}$  sind, wir haben damit ein Verfahren um die  $QR$  Darstellung zu erzeugen.

(Die  $QR$  ist eindeutig, wenn bereits Vektor fest steht  $\Rightarrow$ )

Funktioniert dies in der Praxis gut?

Problem falls



sehr nah beieinander  $\Rightarrow$

Numerische Sensitivität!

⇒ Führt unter Umständen zu falscher Eigenpaare.

Man kann zeigen, dass der klassische Gauß-Schmidt-Algorithmus quadratisch von der Konditionszahl abhängt

Gauß-Schmidt wirkt in Prinzip

$$(I - Q_{j-1} Q_{j-1}^T) x_j \quad \text{Projektion auf orthogonales Komplement}$$

$$(I - q_{j-1} q_{j-1}^T) \cdots (I - q_2 q_2^T) (I - q_1 q_1^T) x_j$$

Modifikation Gauß-Schmidt

$$q_j = x_j$$

für  $i = 1, \dots, j-1$

$$r_{ij} = q_i^T \cdot q_j$$

$$q_j = q_j - r_{ij} q_i$$

end

$$r_{jj} = \|q_j\|_2$$

⇒ (immer noch instabil!) Lösung ist ein Kriterium bestimmt, dass ggf. reorthogonalisiert (Details siehe Slides Technical Paper)

Wofür ist die QR-Zerlegung gut?

Gleichungssystem

$$\Rightarrow \text{QR-Zerlegung} \quad \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{R} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Q}^+ \cdot \underline{Q} \cdot \underline{R} \cdot \underline{x} = \underline{Q}^+ \cdot \underline{b}$$

$$\Leftrightarrow \underline{R} \cdot \underline{x} = \underline{Q}^+ \cdot \underline{b}$$



lässt ein schnelle Lösung zu.

$$a_\mu = r_{\mu\mu} x_\mu$$

$$v_{N-1} = v_{N,N-1} x_N + v_{N,N,N-1} x_{N-1}$$

## QR - Algorithmus

Die QR Zerlegung kann genutzt werden,  
um Eigenwert und Eigenvektoren einer Matrix zu bestimmen.

$$\underline{A} \xrightarrow{\quad} \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}$$

Eine unitäre Transformiert ändert die Eigenwerte nicht  
(„Ähnliche Matrizen“)

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow \underline{Q}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{x} = \lambda \underline{Q}^T \cdot \underline{x}$$

Algorithmus (Einfache Form ineffizient)

$$\underline{A}_1 = \underline{A}$$

für  $k=0, 1, \dots$  do

Führe eine QR Zerlegung durch  $k \geq 0$ , dann

$$\underline{A}_k := \underline{Q}_k \cdot \underline{R}_k$$

$$\underline{A}_{k+1} := \underline{R}_k \cdot \underline{Q}_k$$

and

Man kann zeigen, dass

$$\underline{A}_k = \underline{Q}_k^+ \cdot \underline{Q}_{k-1}^+ \cdot \underline{Q}_{k-2}^+ \cdots \underline{Q}_1^+ \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}_1 \cdots \underline{Q}_{k-2} \cdot \underline{Q}_{k-1}$$

Konstante  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  auf der Diagonal stehen die Eigenwerte

Verallgemeinerung: • Variabel durch Algorithmen (z.B. mit  $(A_k - \lambda \cdot I)$ ) sind die Basis viele Eigenwertprobleme für dicht besetzte Matrizen. (Daher viele Bibliotheken)

- Dichtbesetzte Matrixverfahren zu aufwendig --, skaliert zu stark mit der Anzahl der Elemente

=> spezieller Verfahren für dichtbesetzte Matrizen (Brackets teilen auf das QR Verfahren)

Ziel ist es bei den dichtbesetzten Matrizen nicht alle Eigenwerte zu bestimmen, sondern meist die mit dem niedrigsten Wert z.B.

=> iterative Methoden, meist in Krylov-Raum.

Power-Methode (Richtig Krylov-Methode)

Wir haben eine Matrix  $A$  (symmetrisch)

mit Eigenwerten  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots$

Eigenvektoren  $e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \dots$

Initial gewählten Vektor  $v_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \dots + c_n e_n$

$$A \cdot v_0 = c_1 \lambda_1 e_1 + c_2 \lambda_2 e_2 + c_3 \lambda_3 e_3 + \dots + c_n \lambda_n e_n$$

$$A^k \cdot v_0 = c_1 \lambda_1^k e_1 + c_2 \lambda_2^k e_2 + c_3 \lambda_3^k e_3 + \dots + c_n \lambda_n^k e_n$$

Wenn  $k$  groß genug ist.

$$A^k \cdot v_0 \approx c_1 \lambda_1^k e_1$$

Siehe Methode um niedrigste EW zu bestimmen

Einfache Power Algorithmus

$y = v_0$   
 For  $k=1, 2, \dots$   
 $\theta = \|y\|_\infty$   
 $v = y/\theta$   
 $y = Av$   
 end

$\left. \begin{array}{l} \theta = \|y\|_\infty \\ v = y/\theta \\ y = Av \end{array} \right\} \Leftarrow$  sorgt dafür dass die Zahl in Darstellungsbereich der Fließkomm.!  
 $\| \cdot \|_\infty$  liefert glatte ein Approximierten.

Konvergenz hängt von  $\frac{\|A\|}{|z|}$  ab, falls eng beieinander  
 sehr langsam.

Oft wird auch eine inverse Herite durchgeführt mit  $A^{-1}$   
 oder meist mit einer Shift  $(A - \sigma Id)^{-1}$  um die Eigenwerte  
 in der Nähe von  $\sigma$  zu bekommen.

Dann braucht man ein Solver für lineare Gleichungssysteme  
 (iterativ da große Matrix)

Beispiel Algorithmus:

$y = v_0$   
 For  $k=1, 2, \dots$   
 $\theta = \|y\|_\infty$   
 $v = y/\theta$   
 Löse  $(A - \sigma Id) y = v$  (Bsp.  $y = (A - \sigma Id)^{-1} v$ )  
 end

Die Methode kann realisiert werden als ein Unterraum  
 von Eigenvektoren statt eines einzelnen Vektors.

Überblick über Methoden für dünn besetzte Matrizen

Arnoldi (u. a. Variat. mit Restart, ~~Dilat.~~)  
 CG (Conjugated Gradient), Lanczos (Spezialfall von Arnoldi)  
 Power-Methode, Krylov-Schur,  
 Davidson Type Unterraum Entwicklung

Viele benutzt zum Krylov Unterraum methode.

## Krylov - Unterraum

Die Konstruktion zeigt Verbindung zur Power-Methode

Für ein ges. Vektor  $\underline{v}$  ist der Krylov Unterraum der Ordnung  $m$ :

$$\mathcal{K}_m(\underline{A}, \underline{v}) = \text{span}(\underline{v}, \underline{A} \cdot \underline{v}, \underline{A}^2 \cdot \underline{v}, \dots, \underline{A}^{m-1} \cdot \underline{v})$$

Es fällt sofort auf, dass spektrale Shifts ( $\underline{A} - \sigma I$ ) den Krylov Raum nicht vermindern. Solche Optimierung scheint nichts bringen oder notwendig zu sein.

Die Idee von den meisten Verfahren ist um das Problem nicht für die gesamte Matrix, sondern nur für sehr große Krylov Unterraum zu lösen.

Wir haben schon bei der Power Methode gesehen, dass die Punkte  $\mathbb{I} \omega$  im Krylov Raum dominieren.

(Potenzen in den Eigenwerten / Polynom der Matrix)