

4.4.2. Thermisches Licht (statistischer Operator ρ_{th})

- aus Statistik: Planckscher Strahler
- Licht emittiert von „Ofen“ bei Temperatur T
hier: 1 Mode bei T : $H = \hbar\omega c^{\dagger}c$
- gemischter Zustand im β durch statistische Operator ρ_{th} beschrieben werden, hier kanonische Ensemble

$$\rho_{th} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar\omega c^{\dagger}c}$$

\uparrow Zustandssumme $\beta = \frac{1}{kT}$

Mittelwerte: $\langle \underline{O} \rangle = \text{sp}(\underline{O} \rho_{th})$ in statistischer Physik

\uparrow
Operator

Bemerkung:

- a) Licht das durch Umgebung (exp. Bedingg. viele Wellenlängen und Photonzahl stochastisch erhält) wird i.a. „chaotisches Licht“ genannt
(thermisches Licht ist Bsp.)

math. Def.: alle Licht mit $\Delta n, \Delta E > \Delta n_{\text{geordnet}}, \Delta E_{\text{geordnet}}$
wird chaotisches Licht genannt

b) bekannt über Planck verteilg. ist Mittelwert $\langle u \rangle$
 für Plancksches Licht

$$n_B = \langle u \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = f(T)$$

↑
Bose verteilg.

$$\left(\text{NR: } e^{\beta \hbar \omega} = \frac{\langle u \rangle + 1}{\langle u \rangle} = \frac{n_B + 1}{n_B} \right)$$

c) Zustands summe, ebenso bekannt aus

Statist. Physik: $z = 1 + \langle u \rangle = 1 + n_B$

Ergebnis: $z = \text{sp} (e^{-\beta H}) = \sum_u \langle u | e^{-\beta H} | u \rangle = \dots$

Charakterisierung des therm. Zustands:

(i) Photonen verteilg.

$$p_u = \langle u | \rho_{th} | u \rangle = \frac{1}{z} \langle u | e^{-\beta \hbar \omega c^{\dagger} c} | u \rangle = \frac{1}{z} e^{-\beta \hbar \omega u}$$

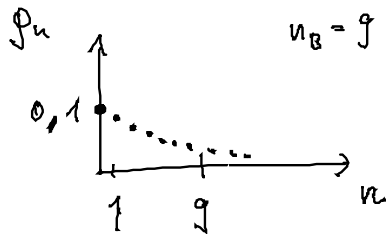
Wahrscheinlichkeit daß
 System im Zustand mit
 u-Photon zu finden

$$c^{\dagger} c | u \rangle = u | u \rangle$$

$$p_u = \frac{1}{\langle u \rangle + 1} \left(\frac{\langle u \rangle}{\langle u \rangle + 1} \right)^u = \frac{n_B^u}{(n_B + 1)^{u+1}} = \text{Wahrscheinlichkeit u-Photon zu finden bei } n_B(T)$$

als Funktion d. Mittelwerts $\langle u \rangle = n_B$ ausdrücken

- p_n klingt ab mit wachsend n
- $p_0 = \frac{n_B^0}{(n_B+1)} = \frac{1}{n_B+1} = \text{endlich}$



(ii) Photonzahl und Schwachg.

Photonzahl $\langle n \rangle = n_B$ (Bose verteilg.)

Schwachg $\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$

$$\langle n^2 \rangle = \text{sp} (c^\dagger c c^\dagger c \rho_{th}) = \sum_n \langle n | c^\dagger c c^\dagger c e^{-\beta \hbar \omega c^\dagger c} | n \rangle$$

ÜA: $\Delta n^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle = n_B^2 + n_B$

flur wird Licht ist bestimmt durch die T:

- mittlere Photonzahl
- Schwachg: > Fockzustand, kohärenzustand (44.3)
- Mittelwert und Schwachg. sind in derselben Größenordnung.

(iii) Feldmittelwert und Schwachg.

Feld $\langle \vec{E} \rangle = \text{sp}(\vec{E} \rho_{\text{th}}) = 0,$

weil $\sum_u \langle u | c^\dagger e^{-i\omega_B c^\dagger c} | u \rangle = \sum_u \langle u | c^\dagger | u+1 \rangle e^{-i\omega_B u} = 0$

kann klass. verstanden werden (Emission stochastischer Wellenpakete)

Schwankung: $\Delta \vec{E}^2 = \langle \vec{E}^2 \rangle - \underbrace{\langle \vec{E} \rangle^2}_0$ \sim Intenzität

ÜA: $\Delta \vec{E}^2 = \frac{q^2}{L^3} \left(2 \frac{V_B}{\omega_B + 1} + 1 \right)$

- Intenzität $\neq 0$

4.4.3. flankenzustände: kohärente Zustände des klass. FD

klass. FD: $\langle \vec{E} \rangle \neq 0$ gesucht

$|\phi\rangle = \sum_u c_u |u\rangle$ es soll gelten f. geschickte Wahl von c_u : $\langle \phi | \vec{E} | \phi \rangle \neq 0$

z.B.: $\langle \phi | \vec{E} | \phi \rangle \sim \langle \phi | c | \phi \rangle$, wenn $c | \phi \rangle = \alpha | \phi \rangle$ gilt,
↑
Zahl

So bekommt man ein endlich E-Feld $\sim \alpha$.

die $|\phi\rangle$'s die diese Eigenwertproblem erfüllen:

$c | \phi \rangle = \alpha | \phi \rangle$ heiße kohärente / flankenzustände

a) Definition

$$|\phi\rangle \equiv |\alpha\rangle, \text{ mit } c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

kannst du Zustand der klass. ED am nächsten

b) zu zeigen ist, daß $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand von c ist:

$$c|\alpha\rangle = c e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$n=0$ existiert nicht in Summe ($| -1 \rangle$)

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle$$

Index verschiebung $n \rightarrow n-1$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\boxed{c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle}$$

α i.a. eine komplexe Zahl
weil c kein hermitescher Operator

c) Normierung und Orthogonal

$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ ist zu zeigen

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{u,v} \frac{\alpha^{*u}}{\sqrt{u!}} \frac{\alpha^v}{\sqrt{v!}} \underbrace{\langle u | v \rangle}_{\delta_{uv}} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_u \frac{|\alpha|^{u+2}}{u!} = e^{-|\alpha|^2} \cdot e^{|\alpha|^2} = 1 \end{aligned}$$

Die Zustände $\{ |\alpha\rangle \}$ sind über vollständig und nicht orthogonal (o.B.). Vorrück gebote! \rightarrow Quasiphot

d) $|\alpha\rangle$ ist kein Eigenzustand von c^\dagger

$$c^\dagger |\alpha\rangle \neq \alpha^* |\alpha\rangle, \text{ aber}$$

$$\langle \alpha | c^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$$

Charakteristika d. Photonenzustands:

$$c_u = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^u}{\sqrt{u!}}$$

(i) Photonverteilung

$$p_u = |c_u|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2u}}{u!}$$

(ii) Photonenzahl und Schwachg.

$$\text{Photonenzahl: } \langle n \rangle = \langle \alpha | \underbrace{c^\dagger c}_{\alpha^* \langle \alpha |} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

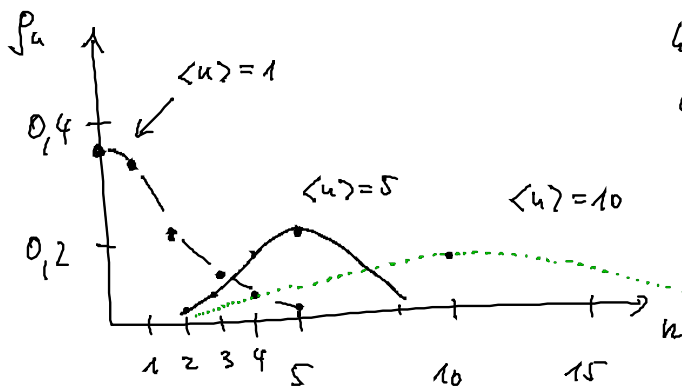
Mittlerer Zahl der Photonen im System ist proportional zu $|\alpha|^2$.

$$\text{Schwächung: } \Delta n = |\alpha|, \quad \Delta n^2 = |\alpha|^2$$

mit

Darstellung der Photonverteilung.

$$p_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} \quad \text{Poissonverteilung.}$$



Wahrscheinlichkeit,
n-Photonen zu finden
mit $\langle n \rangle = |\alpha|^2$

wichtig f. klass. Physik: man braucht nur $\langle n \rangle$ um Ergebnis zu charakterisieren, d.h. mittlere, relative Abw. $\rightarrow 0$:

$$\sqrt{\frac{\Delta n^2}{\langle n \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \xrightarrow{\langle n \rangle \rightarrow \infty} 0$$

für sehr große $\langle u \rangle$ wird:

$$p_u = \frac{1}{\sqrt{2u\langle u \rangle}} e^{-\frac{(u - \langle u \rangle)^2}{2\langle u \rangle}} \quad \text{Gaußverteilt.}$$

(iii) Feld und Feldschwache

$$\langle \vec{E} \rangle = \langle \alpha | \left(i \frac{q}{L^{3/2}} \vec{e} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c(t) + \text{h.a.} \right) | \alpha \rangle$$

$\xrightarrow{e^{-i\omega t} c|\alpha\rangle = \alpha e^{-i\omega t} |\alpha\rangle}$

$$\left(c(t) = c e^{-i\omega t} \right)$$

$$= i \frac{q}{L^{3/2}} \vec{e} \alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + \text{h.a.}$$

mit $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ (komplex)

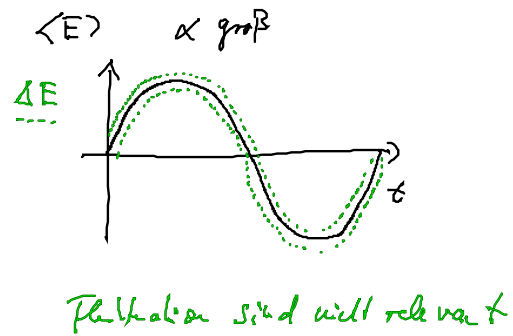
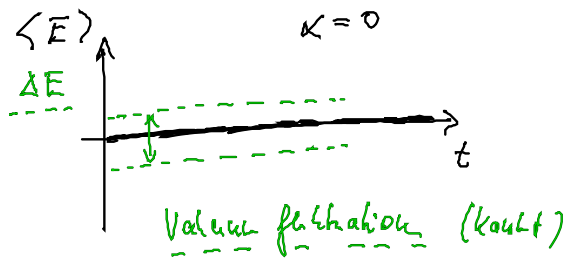
$$\langle \vec{E} \rangle = - \frac{q}{L^{3/2}} 2|\alpha| \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta) \vec{e} \neq 0$$

Der Erwartungswert d. Felds ist ungleich Null und stellt ein klassisch ew. Well dar.

Schwache d. \vec{E} -Felds

$$\Delta E^2 = \langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2 = \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3} = \text{konstant} \quad \ddot{u} A.$$

$$\vec{r} = \text{konst} = 0$$

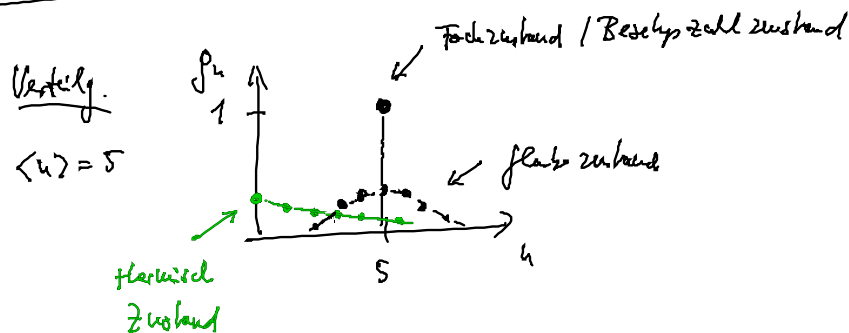


Die fluktuierenden Zustände sind Zustände der klass. Elektrodynamik.

Fluktuation sind von geringerer Bedeutung wenn $|\kappa|$ groß gewählt wird

Erzeugung: klassisch Antenne mit klass. Strom o.B. (später)
kann gut oberhalb der Längenskala

4.4.4. Zusammenfassung zu Zuständen



	$\langle n \rangle$	Δn^2	$\langle \vec{E} \rangle$	ΔE^2
Fock $ n_0\rangle$	n_0	0	0	

flam. $\int H$	u_B	$u_B + u_B^2$	0	
flam. $ \alpha\rangle$	$ \alpha ^2$	$ \alpha ^2$	$\sim \alpha $	
		\ddot{u}_A		\ddot{u}_A