

4.2. Modenentwicklung im freien Raum

Moden \vec{u}_n spezialisieren auf ebene Wellen als eine bequeme Wgl.:

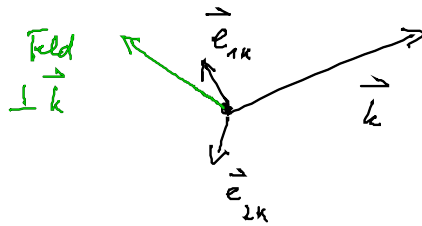
$$\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}_{\lambda k} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{e}_{\lambda k} \quad V=L^3 \text{ Normierung des ebenen Wellen}$$

$$\omega_n \rightarrow \omega_k = c |\vec{k}|$$

$\hat{=}$ vollständiges System v. ebenen Wellen:

$\vec{e}_{\lambda k}$: Polarisationsvektore f. festes \vec{k} , spannen \perp zu \vec{k} Ebene auf

$\lambda = 1, 2 \rightarrow$ Ebene



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda, k} f_k \vec{e}_{\lambda k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} c_{\lambda k}(t) + \text{h. a.}$$

Dimension und Normierung auf harmonische Oszillatoren $c_{\lambda k}(t)$

$$f_k = \text{gewählt} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega(\vec{k})}} \rightarrow \text{Konsistenz gezeigt}$$

beobachtbare Größe:

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = -\sum_{\lambda k} f_k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \vec{e}_{\lambda k} \dot{c}_{-\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

mit $c_{\lambda k}(t) = \pm i \omega_k / |\vec{k}| c_{-\lambda k}^{(+)}(t)$ am Hartley-Bog. (üA)
 ω_k

$$\vec{E} = \sum_{\lambda k} i g_k \vec{e}_{\lambda k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} c_{-\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

$$g_k = \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0} \right)^{1/2}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{\lambda k} i \vec{k} \times \vec{e}_{\lambda k} f_k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} c_{-\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

H in Moden darstellg.: Eichbed. von \vec{E} und \vec{B} : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k \left(c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} + \frac{1}{2} \right)$$

ebenso: $[c_{\lambda k}, c_{\lambda' k'}^\dagger]_- = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{k k'} \quad (k \leftrightarrow k')$

Bemerkung:

a) Max well field im freien Raum kann über harmonisch Oszillatoren beschrieben werden, " - Quantisierung: Bosonen

b) Quankzahlen: $\vec{c}, 1$

c) Zustände ergeben sich im Heisenbergbild $\underline{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$
als Eigenwertproblem und andere Zustände durch Überlagerung
aufbauen

Eigenzustände sind Besetzungszahlzustände mit:

$$c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} |n_{\lambda k}\rangle = n_{\lambda k} |n_{\lambda k}\rangle$$

$$n_{\lambda k} \hat{=} \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Sprachweise: Im Zustand $|n_{\lambda k}\rangle$ befinden sich $n_{\lambda k}$ Photonen
(Anregung d. Quantenfelds) in der Mode λk .

d) Vakuumzustatsenergie:

$$n_{\lambda k} = 0 \quad (\text{keine Photonen})$$

$$\langle H \rangle_{\text{Vakuum}} = \sum_{\lambda k} \frac{1}{2} \hbar \omega_k \rightarrow \infty$$

unproblematisch weil beim Vertausch und Berechn. v. Observablen
keine Rolle, wenn aber Materie im Spiel ist so durchaus
nachweisbar im Rahmen d. Energie-Zustandsdifferenz

e/ Folge der Antisymmetrie :

- (i) Spontane Emission kann nun g.m. erklärt werden
- (ii) Lamb shift : $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2} \rightarrow$ Aufspaltung d. Energiefunktionen im Vakuum

4.3. Feldzustände und Feld / Photon Zahl als charakteristische Größe

Sinnvolle Erwartungswerte :

$$\langle \vec{E} \rangle, \quad I \quad \sim \quad \underbrace{\langle E^- E^+ \rangle}_{\text{Photonstrom}}, \quad \langle n \rangle = \langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k} \rangle$$

Feld Intensität Photonzahl in Mod λk

und die jeweilige Schwachnäherung (QM als statistische Theorie)

$$\vec{E} = \underbrace{i \sum_{\lambda k} g_{\lambda k} \vec{e}_{\lambda k} \}_{\lambda k} c_{\lambda k}(t)}_{E^+} + \underbrace{\text{h.a.}}_{E^-}$$

$$I(\vec{r}, t) = 2\epsilon_0 c \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^+ \rangle$$

$$= 2\epsilon_0 c \sum_{\lambda k} \sum_{\lambda' k'} g_{\lambda k}^* g_{\lambda' k'} \underbrace{\vec{e}_{\lambda k} \cdot \vec{e}_{\lambda' k'}}_{\dots} \underbrace{\int_{\vec{r}} \}_{\lambda k} \}_{\lambda' k'} \langle c_{\lambda k}^+(t) c_{\lambda' k'}(t) \rangle$$

räumlich gemittelte Intensität :

$$\overline{I} = \frac{1}{V} \int d^3r \ 2 \epsilon_0 c \langle \vec{E}^- \cdot \vec{E}^+ \rangle$$

$$\text{erhält: } \frac{1}{V} \int d^3r \ \frac{1}{V} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} = \frac{1}{V} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad \delta_{kk'}$$

$$\hookrightarrow \vec{e}_{\lambda k} \cdot \vec{e}_{\lambda' k} = \delta_{\lambda \lambda'}$$

$$\overline{I} = 2 \epsilon_0 c \frac{1}{V} \sum_{\lambda k} |g_{\lambda k}|^2 \langle \underbrace{c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k}}_{\text{Photonzahl } n_{\lambda k}} \rangle$$

$$\overline{I} = \frac{c}{V} \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k n_{\lambda k}$$

Zufuhrleistung gegeben durch
Zahl d. Photonen $n_{\lambda k}$ mit Energie $\hbar \omega_k$.

4.4. Wichtige Zustände d. Maxwellfelds (Strahlungsfelds)

dichtete als 1 Mode $c_{\lambda k} \rightarrow c, \quad n_{\lambda k} \rightarrow n$

mit Eigenzuständen $c^\dagger c |n\rangle = n |n\rangle$ bekannt: $(n) = |n\rangle \langle n| (c^\dagger)$

alle anderen Zustände: $|\psi\rangle = \sum_n z_n |n\rangle$

(beliebige Zustände)

↑ Zahlen: Entwicklungskoeffizienten
= komplexe (komplex)

a) Charakterisierung d. Zustände

(i) Photonenverteilung $|z_n|^2$:

beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei Messg.

n Photonen zu finden im Zustand $|\psi\rangle$

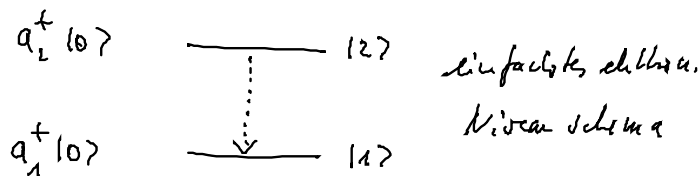
(ii) Photonzahl: $n = \langle \psi | c^\dagger c | \psi \rangle$

Schwankung: $\Delta n = \sqrt{\langle (c^\dagger c - \langle c^\dagger c \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (c^\dagger c)^2 \rangle - \langle c^\dagger c \rangle^2}$

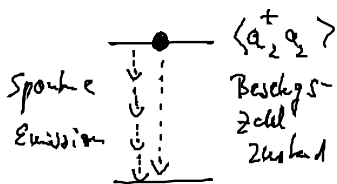
(iii) Feld: $\langle \vec{E} \rangle = \langle \psi | \vec{E} | \psi \rangle$

Schwankung: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2}$

b) Denkbar Zustände



Ausgangspkt. 1 Schema

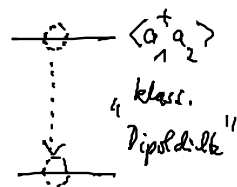


Photonenzahl -
Zustand $|h\rangle$

$\langle \vec{E} \rangle = 0$

$I \neq 0$

4.4.1

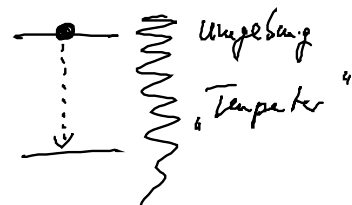


kohärent
Zustand $|\alpha\rangle$

$\langle \vec{E} \rangle \neq 0$

$I \neq 0$

4.4.3



thermisch Zustände

$\langle \vec{E} \rangle = 0$

$I \neq 0$

4.4.2

4.1. Photonenzahlzustand (Fockzustand) $|u_0\rangle$

$c^\dagger |u_0\rangle = u_0 |u_0\rangle, u_0 = 0, 1, 2, \dots$ (Bosonen)

(i) Photonenverteilung $\langle z_u \rangle^2 = \rho_u$

$|u_0\rangle \Rightarrow |u_0\rangle = \sum_u z_u |u\rangle \Rightarrow |z_u|^2 = \rho_u = \delta_{uu_0}$



offensichtlich scharfe Photonverteilung,
es liegen genau u_0 Photonen vor

(ii) Photonenzahl und Schwankung

$\langle u \rangle = \langle u_0 | c^\dagger(t) c(t) |u_0\rangle = \langle u_0 | c^\dagger c |u_0\rangle = u_0$
↑ ↓
 e^{ti} $e^{-i\omega t}$

$\Delta u = \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} = \sqrt{u_0^2 - u_0^2} = 0$
 ↳ $\langle u_0 | c^\dagger c c^\dagger c |u_0\rangle$

Die Schwankung um Mittelwert verschwindet.

Der Fockzustand ist Zustand fester Photonenzahl u_0

(iii) Feld- und Feldschwankung:

$\langle u_0 | u_0 - 1 \rangle = 0$

$\langle \vec{E} \rangle = \langle u_0 | i \vec{e} \{ \frac{\hbar}{2} c(t) + h.c. \} |u_0\rangle = 0$
↑
 $|u_0 - 1\rangle$

$$\sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle} \hat{=} \text{Schwächg.} \neq 0$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3} (2u_0 + 1) \hat{=} \text{Intensität} \quad \text{ÜA}$$

In Exp. wird Intensität über Photostrom gemessen,
die Feldstärke selbst ist Null, für $u_0 = 0$ Vakuumzustand.

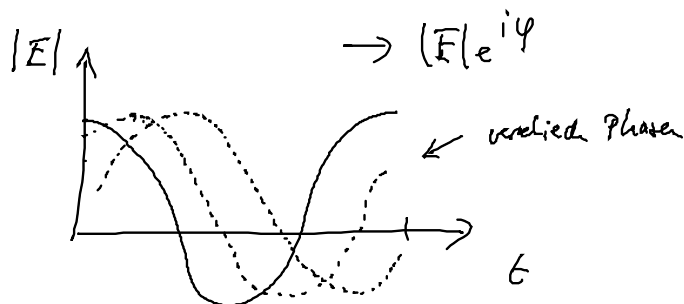
Klassisch Modell

mit $u_0 = \text{fast}$ steht Intensität des Felds $I \sim u_0$,

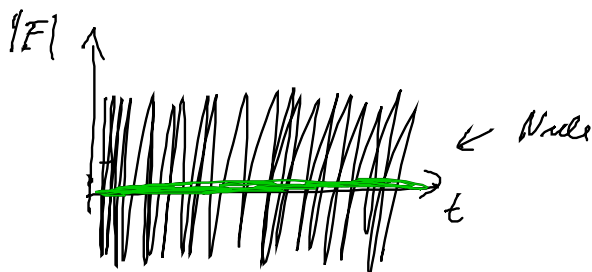
↓ keine Schwächg. der Intensität $\sqrt{I} \sim |E|$ klassisch

Welle d. Phase und Amplitude charakterisiert

φ $|E|$



↓ mittlg.



Lasere Phase stabilisiert und Wahrscheinlichkeit $p_\varphi = \text{konstant}$ fluktuiert

$$\begin{aligned} \langle \bar{E} \rangle_{\text{klass}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi p_\varphi |\bar{E}| e^{i\varphi} + \text{c.c.} \\ & \quad \frac{1}{2\pi} = \text{konstant} \\ &= |\bar{E}| \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{i\varphi}}{i} \right|_0^{2\pi} = |\bar{E}| \frac{1}{2\pi i} (e^{i2\pi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

gen. Interpretation von $\langle \bar{E} \rangle$:

Unschärfe zwischen Intensität u. Phase $I \sim \varphi$

$$\Delta\varphi \cdot \Delta I \geq \frac{1}{2} : \text{Phaseoperator auch in Diskussion}$$