

VI Theorie der Zeitentwicklung von Operatoren

1. Einführung

a) Ankopplung eines externen Felds ohne Vielteilchen effekte

$$H = H_S + W_{\text{ext}}(t) : \text{Einkörperhamiltonianus } (n a_n^\dagger a_n)$$

$$\text{i.a. als bekannt vorausgesetzt: } H_S^{\text{el}} |u\rangle = \epsilon_u |u\rangle$$

Bewegungsgleich. f. Observable $O(t)$ aus Heisenberg / oder

von Heisenberggleichung \Rightarrow geschlossene Gleichung \rightarrow lösbar \checkmark

Beispiele: Blochgleichungen, Dirac-Haken-Gleichungen

b) mit Vielteilchen effekten

$$H = H_0 + H_W + W_{\text{ext}}(t) \begin{array}{l} \nearrow H_0 + H_W^{\text{approx}} + W_{\text{ext}}(t) \\ \searrow H_0 + W_{\text{ext}}(t) + H_W \end{array}$$

\uparrow
 Vielteilchen-effekte

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H_S(t)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv V : \text{Störung}}$

$$\text{bekannt: } H_0 |u\rangle = \epsilon_u |u\rangle$$

Störtheorie: $\langle O \rangle = \langle \varphi_I(t) | O_I(t) | \varphi_I(t) \rangle \stackrel{\text{alternativ}}{=} \text{sp}(O_I(t) \rho_I(t))$

$$\dot{O}_I(t) = i t^{-1} [H_S(t), O_I(t)] \quad \text{--- lösbar ---}$$

$$|\dot{\varphi}_I(t)\rangle = -i t^{-1} V_I(t) |\varphi_I(t)\rangle \quad \leftarrow \text{einsetzen}$$

$$\text{alternativ } \dot{\rho}_I(t) = -i t^{-1} [V_I(t), \rho_I(t)] \quad \leftarrow$$

$V_I = V_I(O_I)$

Störtheorie zu lösen
 (ψ_I, ρ_I)

allgemein
 Form der Gleichung: $\dot{\rho}(t) = -i \phi(t) \rho(t) \hat{=} \psi_I$ -gleichg.
 für Störtheorie
 mit $\phi(t) = \frac{1}{\hbar} [V_I, \cdot] \hat{=} \rho_I$ -gleichg.

2. von Neumann Reihe

Ziel: möglichst viele Ordnung Störtheorie!

aus $\dot{\rho}(t) = -i \phi(t) \rho(t)$ ϕ, ρ sind Operatoren

für Zahlen: $\rho(t) = \rho(t_0) e^{-i \int_{t_0}^t \phi(t') dt'}$ \rightarrow wie für Operatoren!

für Operatoren: $\rho(t) - \rho(t_0) = -i \int_{t_0}^t \phi(t_1) \rho(t_1) dt_1$

durch formale Integration

$$\rho(t) = \rho(t_0) - i \int_{t_0}^t \phi(t_1) \rho(t_1) dt_1$$

↑
immer wieder wechseln, Iteration

$$\rho(t) = \rho(t_0) - i \int_{t_0}^t \phi(t_1) \rho(t_0) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t \phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_2) \rho(t_2) dt_2 dt_1$$

immer wieder lösen der Iteration

$$\rho(t) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \phi(t_1) \dots \phi(t_{n-1}) dt_n \dots dt_1 \right) \rho(t_0)$$

←
t t_n

Zeitordnung

wie würde man obige exp.-Fkt. bekommen:

- a) Vorfaktor $\frac{1}{n!}$ b) überall oben für t

Problem: $[\phi(t_i), \phi(t_j)] \neq 0$, [i.a. nur zeitgleiche Vertauschungsrelationen.]

(i) wenn ϕ ein Zahl wäre: wie bekommt man exp.-Fkt von oben:

0. Term: $\frac{1}{0!} p(t_0)$

1. Term: $-i \int_{t_0}^t dt' \phi(t')$ 1. Term der Exp. Fkt.

2. Term: $(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \phi(t_1) \phi(t_2) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \Theta(t_1 - t_2) \phi(t_1) \phi(t_2)$

$= \frac{(-i)^2}{2!} \left\{ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \Theta(t_1 - t_2) \phi(t_1) \phi(t_2) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \Theta(t_2 - t_1) \phi(t_2) \phi(t_1) \right\}$
 dasselbe Term
 $t_1 \leftrightarrow t_2$ $\uparrow \uparrow$

zweite $\phi(t_1) \phi(t_2)$

$= \frac{(-i)^2}{2!} \left\{ \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \Theta(t_1 - t_2) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \Theta(t_2 - t_1) \right] \phi(t_1) \phi(t_2) \right\}$

$$= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-t}^t \int_{-t}^t \underbrace{(\theta(t_1 - t_2) + \theta(t_2 - t_1))}_{1} \phi(t_1) \phi(t_2)$$

$$= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-t}^t \phi(t_1) \int_{-t}^t \phi(t_2) = \frac{(-i \int_{-t}^t \phi(t_1))^2}{2!}$$

3. Term $\int_{-t}^t \int_{-t}^t \int_{-t}^t \rightarrow \int_{-t}^t \int_{-t}^t \theta(t_1 - t_2) \int_{-t}^t \theta(t_2 - t_3)$

an $\phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) \exists 3!$ Mgl. das Integral zuschreiben

$$\frac{1}{3!} \int_{-t}^t \int_{-t}^t \int_{-t}^t \sum_{\pi_{1,2,3}} \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3)$$

$$\Downarrow p(t) = e^{-i \int_{t_0}^t \phi(t')} \quad \text{Zahlen!}$$

wenn man alle Ordng. aufsummiert

(ii) wenn p und ϕ Operatoren sind, vorrichigen Formulierung:

$\phi(t_1) \dots \phi(t_n)$ unß die Zeitordng. behalte
oder die Wiederherstellg. unß sichergestellt werden

n-ter Term:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_2 - t_1) \dots \int_0^t dt_n \theta(t_{n-1} - t_n) \phi(t_1) \dots \phi(t_n)$$

$$= \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n \theta(t_2 - t_1) \dots \theta(t_{i-1} - t_i) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \phi(t_1) \dots \phi(t_i) \dots \phi(t_n)$$

alle Permutation von $\{t_i\}$ bilden und summieren

$$= \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n \underbrace{\sum_{\substack{\pi \\ \{t_i\}}} \theta(t_{\pi_1} - t_1) \dots \theta(t_{\pi_n} - t_n)}_{\text{wenn man dies zu 1 zusammen fassen würde}} \underbrace{\phi(t_1) \dots \phi(t_n)}_{\text{folgende Zeit-}} \dots$$

↑
Korrelationsfaktor

⇒ folgender Zeit-
reihenfolge

Idle: mit "1" sehr sondern Zeitreihenfolge T
neue

$$= \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n T \phi(t_1) \dots \phi(t_n)$$

Beispiel: 2 Terme $T \phi(t_1) \phi(t_2) =$

$$[\theta(t_1 - t_2) + \theta(t_2 - t_1)] \phi(t_1) \phi(t_2)$$

$$= \begin{cases} \phi(t_1) \phi(t_2) & \text{für } t_1 > t_2 \\ \phi(t_2) \phi(t_1) & \text{für } t_2 > t_1 \end{cases}$$

3. Term: $T \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) = 3! \text{ Terme}$

Formel Lösung:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \phi(t_1) \dots \phi(t_n) p(t_0) \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{t_0}^t dt' \phi(t') \right)^n p(t_0) \\ &= T \underbrace{e^{-i \int_{t_0}^t dt' \phi(t')}} p(t_0) \end{aligned}$$

zeitgeordnete Exp. Fkt.

Unter dem T kann man Funktionen von Operatoren wie

Zahl manipulieren z.B.: $e^{\phi_1 + \phi_2} = e^{\phi_1} e^{\phi_2}$

und später zeitordnen. Beispiele später

Problem ist jetzt auf zeitgeordnete Produkte zurückgeführt

$$\langle T \phi(t_1) \dots \phi(t_i) \dots \phi(t_n) \rangle$$

Wicktheorem sagt uns wie man damit umgeht und die Komplexität verringert.

3. Wicktheorem f. Bosonen

$$\phi(t) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left(b_{\alpha}(t) + b_{\alpha}^{\dagger}(t) \right) \quad \text{i.a. siehe H. El-Phonon WW}$$

$$\langle T \phi(t_1) \dots \phi(t_n) \rangle = \text{Sp}_{\text{phonen}} (T \phi(t_1) \dots \phi(t_n) \rho_{ph})$$

Störprozess war im GW Bild:

Phonen tragen H_0 - Zeitabhängigkeit $b_{\alpha}^{(+)}(t) = b_{\alpha}^{(+)} e^{-i\omega_{\alpha} t}$

ρ_{ph} ist der statistische Operator am Beginn des Prozesses, i.a. $e^{-\frac{H_{ph}^0}{kT}}$

Idee: jede Form der Reihe kann über Produkte von Fundamentalelementen ausgedrückt werden.

a) Fundamentelement $D(t_1, t_2) = \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle$

„Phonen Greenfunktion, Propagator“

$$= \theta(t_1 - t_2) \langle \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle \phi(t_2) \phi(t_1) \rangle$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \text{Sp}_{\text{ph}} \left(\sum_{\alpha_1, \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} (b_{\alpha_1}(t_1) + b_{\alpha_1}^{\dagger}(t_1)) (b_{\alpha_2}(t_2) + b_{\alpha_2}^{\dagger}(t_2)) \right) \frac{e^{-\beta H_{ph}^0}}{Z}$$

↑
Zustandsraum

$$\text{Sp} \hat{=} \sum_{\alpha} \langle \alpha | \cdot | \alpha \rangle \quad \text{über vollständiges System:}$$

$|h\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \end{pmatrix}$ von Besetzungszuständen:
 \downarrow wo Paare v. Erzeug / Vernichtungsoperatoren bei

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha_1, \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \text{sp} \left(b_{\alpha_1}(t_1) b_{\alpha_2}^\dagger(t_2) + b_{\alpha_2}^\dagger(t_1) b_{\alpha_1}(t_2) \right) \frac{e^{-\beta H_{\alpha_k}}}{Z}$$

$\alpha_1 = \alpha_2$ sonst kein Überlapp bei spw

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha} g_{\alpha}^2 \left\{ (1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)} + u_{\alpha} e^{i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)} \right\}$$

u_{α} : Phasenzahl: Bonusteilg.

+ $(t_1 \leftrightarrow t_2) \rightarrow$ 2. Thetafunktion darf nicht vergessen werden

$$D(t_1, t_2) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}^2 \left\{ (1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha}|t_1 - t_2|} + u_{\alpha} e^{+i\omega_{\alpha}|t_1 - t_2|} \right\}$$

b) Wie kann man $\langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) \phi(t_4) \rangle$
 nach $D(t_i, t_j)$ zerlegen

$$\phi(t_1) \rightarrow \phi_1$$

ansetzen:

$$\langle T b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$$

$$\langle T b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle T \phi_2 b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_3 \phi_4 \rangle$$

$\dots = 0$

$$+ \langle T \phi_2 b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle T \phi_2 \phi_3 b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_4 \rangle$$

$\dots = 0$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_4 \rangle - \langle T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_{\alpha_1}^{(+)} \rangle$$

$$\dots = 0$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_{\alpha_1}^+ \rangle$$

$$= \langle T \phi_3 \phi_4 \rangle \underbrace{[b_{\alpha_1}^+, \phi_2]}_{\text{Kein Operator darüber}} + \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_3]$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_4] + \overbrace{\text{sp}_{\rho_4} (T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_{\alpha_1}^{(+)} \rho_{\rho_4}^0)}^*$$

dazu $b_{\alpha}^{(+)} \rho_{\rho_4}^0 = \rho_{\rho_4}^0 b_{\alpha}^{(+)} e^{\pm \epsilon_{\alpha} \beta}$
 \uparrow Phonenergie

Folde: und links
bringen um
linke Seite zu haben

$$* = \text{sp}_{\rho_4} (\underbrace{T \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rho_{\rho_4}^0}_{\text{Zyklische Vertauschung}} b_{\alpha_1}^{(+)}) e^{\pm \epsilon_{\alpha} \beta}$$

Term auf linke Seite bringen (definiert)

$$\langle T b_{\alpha_1}^+ \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \frac{-1}{e^{+\beta \epsilon_{\alpha_1}}} (D(t_3, t_4) [b_{\alpha_1}^+, \phi_2] + \dots)$$

$$\langle T b_{\alpha_1} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \frac{-1}{e^{-\beta \epsilon_{\alpha_1}}} (D(t_3, t_4) [b_{\alpha_1}, \phi_2] + \dots)$$

$$[b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_2] = \left(b_{\alpha_1}^{(+)} \sum_{\alpha_2} g_{\alpha_2} (b_{\alpha_2}^+ + b_{\alpha_1}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\alpha_2} g_{\alpha_2} (b_{\alpha_2}^\dagger + b_{\alpha_2}) b_{\alpha_1} \\
 & = \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} g_{\alpha_1} e^{-i\omega_{\alpha_1} (t_1 - t_2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } u_\alpha = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_\alpha} - 1} \quad , \quad -1 - u_\alpha = \frac{1}{e^{-\beta \epsilon_\alpha} - 1}$$

zusammen fassen:

$$\begin{aligned}
 \langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle &= D(t_1, t_2) D(t_3, t_4) \\
 &+ D(t_1, t_3) D(t_2, t_4) \\
 &+ D(t_1, t_4) D(t_2, t_3)
 \end{aligned}$$

1. Wicktheorem:

Zeitgeordnete Produkte v. Bosonoperatoren ϕ im GW-Bild
 werden in alle mögl. Permutationen von je 2 Operatoren zerlegt:

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \dots \rangle = \sum_{\pi} \frac{1}{\pi} \langle T \phi_a \phi_b \dots \rangle$$