

## 2.4. Diskussion Rategleichungen

Photonenzahl:  $\dot{n}_0 = \Gamma f_2 + \Gamma (f_2 - f_1) n_0$

Besetzung:  $\dot{f}_2 = \underbrace{-\Gamma f_2}_{\text{Spontane Effekte ohne } n_0} - \underbrace{\Gamma (f_2 - f_1) n_0}_{\text{stimuliert Effekte mit } n_0 \neq 0}$

$\Gamma$ : Rate der Elektron-Licht-WW

Erhaltungssatz:  $f_1 = 1 - f_2$  als Nebenbedingung

a) spontane Effekte:  $n_0 \ll 1$ , AB:  $f_2(0) = f_2^0$ ,  $n_0(0) = 0$ :

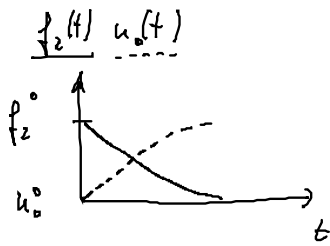
$\dot{n}_0 = \Gamma f_2$ ,  $\dot{f}_2 = -\Gamma f_2$   $f_2^0$  + Photovakuum

$\dot{n}_0 = \Gamma e^{-\Gamma t} f_2^0 \leftarrow f_2 = f_2^0 e^{-\Gamma t}$

$n_0 - n_0^0 = \int_0^t dt' \Gamma e^{-\Gamma t'} f_2^0 = (1 - e^{-\Gamma t}) f_2^0$

$\Rightarrow$  für spontane Effekte:  $f_2 = f_2^0 e^{-\Gamma t}$

$$u_0 = (1 - e^{-\Gamma t}) / \Gamma$$



spontane Emission:  $\downarrow$   $u_0$

$$\text{Erhaltungssatz: } u_0 + f_2 = \text{konstant}$$

(b) stimulierte Effekte:  $u_0$  groß gegen 1

Ratengleichsystem mit  $u_0$  dominant Forman:

$$\text{ausdrücke der flucht wegen mit: } f_1 + f_2 = 1 \quad f_1 = 1 - f_2$$

definieren der Inversion:  $\Delta = f_1 - f_2$  Umkehrmaß für  
Abwieg. von Grundzustand

$$\Delta = 1 \text{ wenn ZNS in (1)}$$

$$\Delta = -1 \text{ wenn ZNS in (2)}$$

$$\dot{\Delta} = -2\dot{f}_2 \quad \text{aus } \Delta = 1 - 2f_2$$

$$\downarrow \quad \dot{u}_0 = -\Gamma \Delta u_0, \quad \dot{\Delta} = -2\Gamma \Delta u_0 \quad \text{als unformalisierte Ratengleichungen}$$

$$\text{AB: } u_0(0) = u_0^0 \neq 0$$

$$\Delta(0) = \Delta_0$$

wichtiger fluchtunsystem, Lösung durch Frick:

$$\frac{\frac{du_0}{dt}}{\frac{d\Delta}{dt}} = \frac{-\cancel{\Gamma} \Delta u_0}{-2\cancel{\Gamma} \Delta u_0} \quad \Downarrow \quad \frac{du_0}{d\Delta} = \frac{1}{2} \quad \Downarrow \quad u_0 - u_0^0 = \frac{1}{2} (\Delta - \Delta_0)$$

einsetzen von  $\Delta(t) = \Delta_0 + 2(u_0(t) - u_0^0)$  in  $\ddot{u}_0$  Gleichung:

$$\ddot{u}_0 = -\Gamma (\Delta_0 - 2u_0^0) u_0 - 2\Gamma u_0^2 \quad \text{mittleren Dgl f. } u_0$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{du_0}{u_0 (a + 2u_0)} = -\Gamma dt \quad \text{mit } a = \Delta_0 - 2u_0^0$$

Integraltafel

$$u_0(t) = \frac{(\Delta_0 - 2u_0^0)}{(\Delta_0 e^{a\Gamma t} - 2u_0^0)} u_0^0$$

AB:  $t=0 \quad u_0(t=0) = u_0^0 \quad \checkmark$

Auswertung für  $u_0^0$  groß:  $a = \Delta_0 - 2u_0^0 < 0$

$\Downarrow e^{-|a|\Gamma t} \hat{=} \text{abklingend Exp. fkt.}$

stationär f.  $t \rightarrow \infty$

$$u_0^{\text{stationär}} = \cancel{u_0^0} \frac{\Delta_0 - 2u_0^0}{-2\cancel{u_0^0}} = \frac{\Delta_0 - 2u_0^0}{-2}$$

$$= \begin{cases} \overline{\bullet} & \Delta_0 = 1 \rightarrow u_0^{\text{stationär}} = u_0^0 - \frac{1}{2} \\ \bullet & \Delta_0 = -1 \rightarrow u_0^{\text{stationär}} = u_0^0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

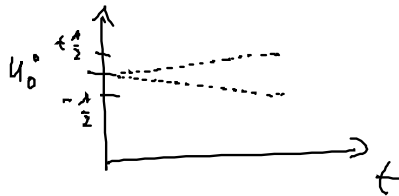
Achtg: ist gem. Mittelwert, muß nicht ganzzahlig sein

zugehörige Inversion:

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{stationär}} &= \Delta_0 + 2(u_0^{\text{stationär}} - u_0^0) = \Delta_0 + 2(u_0^0 \mp \frac{1}{2} - u_0^0) \\ &= \mp 1 \pm 1 = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Inversion ist Null f. beide  $u_0^{\text{stationär}}$  (gem. Mittelwert)

zeitl. Lsg.:



$$\Delta^{\text{st.}} = 0 \rightarrow \begin{matrix} \overline{\bullet} \\ \bullet \end{matrix}$$

im Mittel sind die Wahrscheinlichkeit  $\sigma_{\text{refl}} / \sigma_{\text{tr}} = 1$  zu finden gleich.

Darstellung: die Aussage daß man ein System durch Photonen

$$\text{mit } \Delta_0 = -1 \rightarrow 0 \text{ oder } \Delta_0 = +1 \rightarrow 0 \text{ treibe kann}$$

gilt nur unter den gemacht. Näherungen.

Jenseits der Markoffnäherung mit Laseranregg.  $\langle c_{1k} \rangle \neq 0$  kann man Reflexion erzeugen.

(c) Auswertg. f. Laserprozess

bis ohne spontan Emission:

$$\dot{u}_0 = -\Gamma u_0 \Delta - 2\kappa u_0$$

→ Dämpf. der Photonzahl, Rate:  $\kappa$   
( $\hat{=}$  Verluste in Resonatorwand)

$$\dot{\Delta} = -2\Gamma \Delta u_0 - \underbrace{\Gamma_p (\Delta - \Delta_p)}_{\text{Ergänzung}}$$

→ Pumpprozess am zNS,  
treibt System in die Tuning  $\Delta_p$   
mit Rate  $\Gamma_p$

- | ●

→ sorgt für  $\Delta_p$ :

+ | ⊙

also Tuning  
beim Laser

$$\Delta_p < 0$$

Suche stationäre Lösungen:

$$\dot{\Delta} = 0 \quad \Downarrow \quad \Delta = \frac{\Gamma_p \Delta_p}{2\Gamma u_0 + \Gamma_p}$$

$$\text{einsetz in } \dot{u}_0 = 0 \quad \Downarrow \quad -\Gamma u_0 \frac{\Gamma_p \Delta_p}{(2\Gamma u_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa u_0 = 0$$

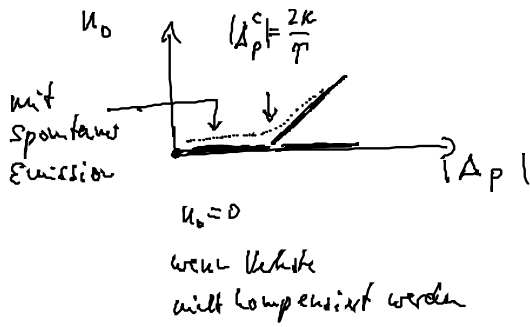
$u_0$ -födig. hat 2 mögl. Lösungen:

$$u_0^{(1)} = 0, \quad u_0^{(2)} = \frac{\Gamma_p}{4\kappa} \left( -\Delta_p - \frac{2\kappa}{\Gamma} \right) \neq 0$$

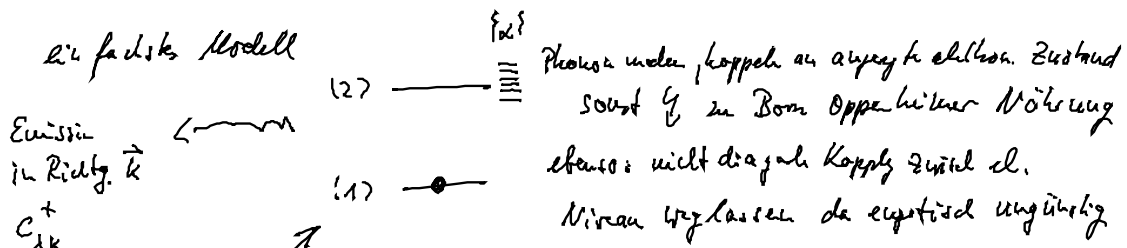
$$\text{wenn } -\Delta_p > \frac{2\kappa}{\Gamma} \quad \text{mit } \Delta_p < 0$$

$$|\Delta_p| > \frac{2\kappa}{\Gamma}$$

Tuning muß f. endlichen Photonzahl Verluste  $\kappa$  kompensieren



### 3. Schwingungsspektroskopie f. Zweilichtsysteme



Wasserfeld  $\vec{E}(t)$  soll  
Ausgangswert  
 $\sum_{ee'} \vec{E}(t) \cdot \vec{d}_{ee'} a_e^\dagger a_{e'} = H_{el-atom}$

$$H_{el-atom} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} g_{\alpha} a_e^\dagger a_{e'} (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha})$$

$$\rightarrow \sum_{\alpha} \frac{1}{2} g_{\alpha} a_2^\dagger a_1 (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha})$$

(diagonal:  $l=l', l=2$ )

$\vec{E}(t)$  ist klassisch Feld

Frage: was kann man aus Lichtstreuung lernen?

im Detektor wird Photonzahl bzw. der Änderungsrate gemessen:

$$\dot{C}_{\lambda k}^\dagger = i \omega_{\lambda k} C_{\lambda k}^\dagger + i g_{\lambda k} P_{12}, \quad P_{12} = a_1^\dagger a_2$$

Quelle des Photons ist elektron. Übergang amplituden  $a_1^\dagger a_2$ :

$$\frac{d}{dt} a_1^\dagger a_2 = \frac{i}{\hbar} [H_{el}^0 + H_{ph}^0 + H_{el-ph} + H_{el-ph,1} a_1^\dagger a_2]$$

$$= -i\omega_0 a_1^\dagger a_2 + 0 + i\Omega(1 - 2 \underbrace{a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2}_{= \text{Inversion}}) +$$

$$\frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{\alpha} g_{\alpha} (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha}) a_2^\dagger a_1 a_2 \right]$$

$$-i \sum_{\alpha} g_{\alpha} (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha}) a_1^\dagger a_2 \equiv -i\phi(t) a_1^\dagger a_2$$

$$\phi(t) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha})$$

hier gesagt: wenn  $a_1^\dagger a_2 \Rightarrow 0$  (Schwach Anregg.) braucht man für  
 3.1. Gleichg. f. Dipolstärke Lumineszenz!

$$\dot{P}_{12} = -i\omega_0 P_{12} + i\Omega(t) - i\phi(t) P_{12}(t)$$

ist ein gewöhnliche DSG-Gleichung, mit Energiefunktion  $\phi(t)$

$$\sim -i(\omega_0 + \phi(t)) P_{12}$$

Energie  $\omega_0$  + Energie fluktuation durch Photonen  $\phi(t)$

mittlere Operatorgleichg.:  $\underline{b_{\alpha} P_{12}} \sim \dot{P}_{12}$

formale Lösung:

$$P_{12}(t) = \underbrace{i \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} \Omega(t')}_{\text{freie Ausbreitung}} - i \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} \phi(t') P_{12}(t')$$

$$= i \int_{-\infty}^t dt G_0(t-t') \Omega(t') - i \int_{-\infty}^t dt' G_0(t-t') \phi(t') P_{12}(t')$$

$$P_{12}(t) = \overbrace{P_{12}^{(0)}}_{\text{Lös. ohne WW}} + \int_{-\infty}^t dt' G_0(t-t') V(t') P_{12}(t')$$

$-i\phi(t') \equiv V(t')$

matr. Strukt. :  $P_{12} = P_{12}^{(0)} + G_0 V P_{12}$  ein

Lippmann-Schwinger Gleichung (Störtheorie)

Lös. der Iteration :  $P_{12}^{(0)}$  sei bekannt, dann immer wieder auf rechte Seite einsetzen.

### 3.2. Iterative Lösung.

0.te Ordng:  $P_{12}^{(0)}$  = von oben bekannt

1. -te Ordng:  $P_{12}^{(1)}(t) = P_{12}^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^t dt' G_0(t-t') V(t') P_{12}^{(0)}(t')$

freie Lös.  $P_{12}^{(0)}$  „stößt“ zur Zeit  $t'$  an  $V(t')$  und breitet sich dann frei aus  
Integral über alle mögl. WW-Zeiten  $t'$

2. -te Ordng:  $P_{12}^{(2)}(t) = P_{12}^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^t dt' G_0(t-t') V(t') P_{12}^{(0)}(t')$

$$+ \int_{-\infty}^t dt' G_0(t-t') V(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_0(t'-t'') V(t'') P_{12}^{(0)}(t'')$$

usw.

jetzt Erwartungswert bildg. bzgl. der Phasenfunktion :

$$\langle P_{12} \rangle = \text{sp} ( P_{12}(t) \rho^{(0)} )$$



$$p^{(0)} = \frac{1}{z_{cl}} e^{-\beta H_{cl}} \cdot \frac{1}{z_{ph}} e^{-\beta H_{ph}}$$

Spur über Phasenraum  $\hat{=}$   $\sum_{\{\alpha\}} \langle \{\alpha\} | p_{12}(t) \frac{1}{z_{ph}} e^{-\beta H_{ph}} | \{\alpha\} \rangle$

bis zur 2. Ordnung einsetzen

0-te Ordnung:

$$p_{12}^{(0)} = i \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} e^{-i\omega_L t'} \tilde{\Omega}(t')$$

langsam Einfallend

↑ schnelle Oszillation

$$\omega_L \ll \omega_0 \quad \approx i \frac{e^{-i\omega_L t}}{\omega_0 - \omega_L} \tilde{\Omega}(t)$$

Ausregg. unterhalb Resonanz

entsteht Linie in Lichtstreuung bei  $\omega_L$  mit Breite der Einfallend bei Ausföhr. der Fouriertrafo.

„Rayleigh-Streuung“

1-te Ordnung:  $\langle \{\alpha\} | V(t') | \{\alpha\} \rangle$  bei spurbildg.

$$\approx \langle \{\alpha\} | \underbrace{\sum_{\beta} g_{\beta} (b_{\beta}^{\dagger} + b_{\beta})}_{\text{orthogonal auf } \langle \{\alpha\} |} | \{\alpha\} \rangle = 0$$

2-te Ordnung:

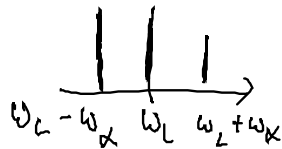
$$V(t_1) V(t_2) \sim V(t_1) V(t_2)$$

$$\sim \sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \left( b_{\alpha_1}^+(t_1) + b_{\alpha_1}(t_1) \right) \left( b_{\alpha_2}^+(t_2) + b_{\alpha_2}(t_2) \right)$$

$$\text{genau } \langle \{\alpha\} | V(t_1) V(t_2) | \{\alpha\} \rangle$$

$$= \sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \langle \{\alpha\} | \underbrace{b_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_2}^+ + b_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_2}}_{\delta_{\alpha_1 \alpha_2} + b_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_1}} | \{\alpha\} \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} g_{\alpha}^2 \left\{ \underbrace{(1 + u_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)} + u_{\alpha} e^{i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)}}_{\text{Prozess der Korrelate mit } e^{-i\omega_{\alpha}(t_1 - t_2)}} \right\}$$



Stoh  $\uparrow$  Absorbtion  
Reflexion