

### III. 6. Drehimpuls des starren Körpers

betrachte zunächst den Gesamtdrehimpuls  $\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{l}_i$  (im diskreten Fall)

Im raumfesten System  $(K)$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_S + \underline{r}_i') \times (\underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

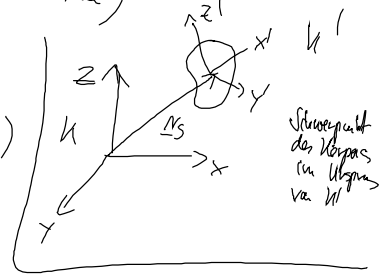
benutze

•  $\underline{v}_i = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'$   
(raumfest)

↳ Ortsvekt. in  $K'$  (Körperfestes System)

und

•  $\underline{r}_i = \underline{r}_S + \underline{r}_i'$   
bezgl.  $K$                       bezgl.  $K'$



$$\Rightarrow \underline{L} = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_S \times \underline{v}_S)}_M + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_S \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')}_{\underline{r}_S \times (\underline{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i') = \text{Null}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i' \times \underline{v}_S)}_{(\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i') \times \underline{v}_S = \text{Null}} + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

$$\underline{L} = M (\underline{r}_S \times \underline{v}_S) + \sum_{i=1}^N \underline{r}_i' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

Schwerpunkt-Drehimpuls  $\underline{L}_S$

Relativ-Drehimpuls  $\underline{L}_{rel}$

(es gehen nur "Körper-feste" Vektoren  $\underline{r}_i'$  und die Drehachse ein!)

analog im kontinuierlichen Fall:

$$\underline{L} = \underline{L}_S + \int dV' \rho(\underline{r}') \underline{r}' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

$\underline{L}_{rel}$

#### Bemerkungen

- Erinnerung: Im "abgeschlossener" System (d.h. System ohne äußere Kräfte) (s. Kap I) gilt  $\dot{\underline{L}} = 0$  Erhaltung des Gesamtdrehimpulses (im raumfesten System!)

- $\underline{L}_S$  (Schwerpunktsantität) hängt ab von  $\underline{r}_S$ , d.h. vom Ursprung des raumfesten Systems  $\mathcal{K}$
- $\underline{L}_{rel}$  ist dagegen unabhängig vom Ursprung von  $\mathcal{K}$  !!

Umformulieren des Integrandes (bzw. Summanden) von  $\underline{L}_{rel}$

$$\underline{L}_{rel} = \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \underline{r}' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

benutze:  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b})$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \left( \underline{\omega} r'^2 - \underline{r}' (\underline{\omega} \cdot \underline{r}') \right) \quad r' = |\underline{r}'|$$

Komponenten:

$$\left( \underline{L}_{rel} \right)_\mu = \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \left( \omega_\mu r'^2 - \left( \underline{r}' \right)_\mu (\underline{\omega} \cdot \underline{r}') \right), \quad \mu = 1, 2, 3$$

$$= \sum_{\nu=1}^3 \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \left( \omega_\nu \delta_{\mu\nu} r'^2 - \left( \underline{r}' \right)_\mu \omega_\nu \left( \underline{r}' \right)_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^3 \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \underbrace{\left( r'^2 \delta_{\mu\nu} - \left( \underline{r}' \right)_\mu \left( \underline{r}' \right)_\nu \right)}_{J_{\mu\nu}} \omega_\nu$$

$J_{\mu\nu}$  Komponenten des Trägheitstensors (in  $\mathcal{K}'$ ) !

$$\left( \underline{L}_{rel} \right)_\mu = \sum_{\nu=1}^3 J_{\mu\nu} \omega_\nu$$

Damit:  $\underline{L}_{rel} = \underline{J} \underline{\omega}$  (\*)

Bemerkungen:

- $\textcircled{P}$  ist analog zur Relation  $\underline{p} = m \underline{v}$  für den linearen Impuls  
(bzw.  $\underline{P} = M \underline{v}_S$ )

beachte: Masse ist skalare Größe  $\Rightarrow \underline{P}$  hat dieselbe Richtung wie  $\underline{v}_S$ !

Anders bei  $\underline{L}_{rel}$ :

Da  $\underline{J}$  ein Tensor 2. Stufe ist, hat  $\underline{L}_{rel}$  im Allgemeinen nicht dieselbe Richtung wie  $\underline{\omega}$ !

Ausnahme:  $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$  (normierter) Eigenvektor von  $\underline{J}$ , „Hauptträgheitsachse“

$$\Rightarrow \underline{J} \underline{\omega} = \omega \underline{J} \underline{j}_i = \omega J_{i,j} \underline{j}_j \quad (\text{beachte: } \underline{J} \underline{j}_i = J_{i,j} \underline{j}_j)$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = \underline{J} \underline{\omega} = \omega J_{i,j} \underline{j}_j = J_{i,j} \underline{\omega} \quad !!$$

dann ist  $\underline{L}_{rel}$  also auch parallel zu  $\underline{\omega}$ !

- $\textcircled{*}$  erlaubt Umformulieren des Rotationsanteils zur kinetischen Energie:

$$T^{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{J} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{L}_{rel}$$

Projektion von  $\underline{\omega}$  auf  $\underline{L}_{rel}$  (bzw. umgekehrt)

### III.7. Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Ausgangspunkt (s. Kap. I., Newton'sche Mechanik)

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(\underline{L}) = \sum_{i=1}^N \underline{m}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext} \quad \text{"ext" für extern}$$

Zeitl. Änderung des  
Gesamt-drehimpulses  
bezgl. des raumfesten  
Systems  $K$

äußere Drehmoment  
äußere Kraft auf Teil  $i$

## Folgerungen für den Relativ-Drehimpuls

$$\underline{L}(\epsilon) = \underline{L}_S(\epsilon) + \underline{L}_{\text{rel}}(\epsilon)$$

Zerlegung des Schwerpunktmoments

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_S(\epsilon) = \frac{d}{dt} (M \underline{r}_S \times \underline{v}_S) = \underbrace{M \dot{\underline{r}}_S \times \underline{v}_S}_{\text{Null}} + M \underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S$$

$$= M \underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S = M \underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S$$

$$= M \underline{r}_S \times \ddot{\underline{r}}_S = \underline{r}_S \times M \ddot{\underline{r}}_S$$

— Gesamtmasse

Schwerpunkts beschleunigung

$$M \ddot{\underline{r}}_S = \underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_S(\epsilon) = \underline{r}_S \times \underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \quad (**)$$

Gesamtkraft auf den Schwerpunkt  
(tot\* für total)

lineare  
Gesamtimpuls

analog zu  $\frac{d}{dt} \underline{P}(\epsilon) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i(\epsilon)$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{v}}_i(\epsilon) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i(\epsilon) = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i(\epsilon)$$

Newton

$$= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij}(\epsilon) + \underline{F}_i^{\text{ext}}(\epsilon) \right) = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{ext}}(\epsilon)$$

Kraft aus Wechselwirkung zw. i und j      äußere Kraft

$$= \underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = M \ddot{\underline{r}}_S(\epsilon)$$

$$\text{Doppelsumme } \sum_i \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} = 0 \quad \text{wegen } \text{actio} = \text{reactio}$$

andererseits hatten wir ja

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(\epsilon) = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{ext}} = \underline{N}^{\text{ext}} \quad (**)$$

alles im raumfesten System!

benutze nun  $\underline{r}_i = \underline{r}_S + \underline{r}_i'$

$$\text{aus } \textcircled{*}: \frac{d}{dt} \underline{L}(\underline{\epsilon}) = \sum_{i=1}^N (\underline{m}_S + \underline{m}_i') \times \underline{F}_i^{\text{ext}}$$

$$= \underline{m}_S \times \underbrace{\sum_{i=1}^N \underline{F}_i^{\text{ext}}}_{\underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}} + \sum_{i=1}^N \underline{m}_i' \times \underline{F}_i^{\text{ext}} \stackrel{\textcircled{*}}{=} \underline{N}^{\text{ext}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underline{L}(\underline{\epsilon}) = \underline{m}_S \times \underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \underline{m}_i' \times \underline{F}_i^{\text{ext}} = \underline{N}^{\text{ext}}$$

beachte jetzt noch  $\textcircled{**}$   $\frac{d}{dt} \underline{L}_S(\underline{\epsilon}) = \underline{m}_S \times \underline{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$

$\Rightarrow$  der 2. Term kann also mit der Zeitableitung von  $\underline{L}_{\text{rel}}$  identifiziert werden!

$$\text{also: } \boxed{\frac{d}{dt} \underline{L}_{\text{rel}}(\underline{\epsilon}) = \sum_{i=1}^N \underline{m}_i' \times \underline{F}_i^{\text{extern}} = \underline{N}_{\text{rel}}^{\text{ext}}}$$

äußeres Drehmoment  
im Relativsystem  
( $\hat{=}$  Körperfestes System  $K'$ )

Beachte:

Die Zeitableitung in obiger Gleichung wird im raumfesten System genommen (denn das war unser Ausgangspunkt!)

Ziel: Herleitung einer Gleichung für  $\underline{L}_{\text{rel}}$ , die komplett (incl. Zeitableitung) auf das körperfeste System bezogen ist!

Einhengung am Kap. III.2

Transformation der Zeitableitung von raumfestem in das körperfeste System für beliebige Vektoren  $\underline{G}$

$$\left( \frac{d}{dt} \underline{G} \right)_{\text{Raum } (K)} = \left( \frac{d}{dt} \underline{G} \right)_{\text{Körper } (K')} + \underline{\omega} \times \underline{G}$$

das hatten wir schon mehrfach benutzt!

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \underline{r}_S(t) + \underline{r}'(t) \\ \underbrace{\quad}_{(K)} & \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{(K')} \\ \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} \Big|_K &= \frac{d\underline{r}_S}{dt} \Big|_K + \frac{d\underline{r}'}{dt} \Big|_K = \underbrace{\frac{d\underline{r}_S}{dt} \Big|_K}_{\underline{v}_S} + \underbrace{\frac{d\underline{r}'}{dt} \Big|_{K'}}_{\text{Null! (starrer Körper)}} + \underline{\omega} \times \underline{r}' \\ &= \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}' \end{aligned}$$

Anwendung auf den Relativ-Drehimpuls

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_K = \frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{L}_{rel} = \underline{N}_{rel} \quad \left( = \sum_{i=1}^N m_i \underline{a}_i' + \underline{F}_i^{ext} \right)$$

benutze nun

$$\underline{L}_{rel} = \underline{J} \underline{\omega} \quad \text{und beachte, dass} \quad \frac{d}{dt} \underline{J} \Big|_{K'} = 0 \quad !$$

Im Körperfesten System ist der Trägheitstensor zeitlich konstant!

also folgt  $\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} \Big|_{K'} = \underline{J} \underline{\dot{\omega}}$  — Zerlegung von  $\underline{\omega}$  in  $K'$

$$\Rightarrow \underline{J} \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{J} \underline{\omega} = \underline{N}_{rel}$$

Bewegungsgl. des starren Körpers im Körperfesten System  $K'$

( $\underline{\dot{\omega}}$  ist hier Zerleg. in  $K'$ )

das sind 3 Gleichungen für die Komponenten  $\mu=1,2,3$

$\Rightarrow$  „Euler'sche Gleichungen“

Umformulierung der Vektorgleichung (\*)

Zerlegung  $\underline{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \underline{j}_i$

Hauptachsen, d.h.  $\underline{J} \underline{j}_i = J_i \underline{j}_i$   
(normale Eigenvektoren)

Komponente von  $\underline{w}$  bzgl.  $\underline{j}_i$

$\Rightarrow \dot{\underline{w}} = \sum_{i=1}^3 \dot{w}_i \underline{j}_i$  Hauptachsen sind zeitl. konstant in  $\mathcal{K}'$ !

analog:  $\underline{N}_{rel} = \sum_{i=1}^3 N_i \underline{j}_i$

bekanntes noch  
 $\underline{J} \dot{\underline{w}} = \sum_{i=1}^3 J_i \dot{w}_i \underline{j}_i$

Einsetzen in (\*)

$$\sum_{i=1}^3 J_i \dot{w}_i \underline{j}_i + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 w_k w_l J_l (\underline{j}_k \times \underline{j}_l) = \sum_{i=1}^3 N_i \underline{j}_i$$

Hauptachsen sind orthogonal zueinander  $\rightarrow$  Gleichung "zerfällt"

$$\Rightarrow J_i \dot{w}_i + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 w_k w_l J_l (\underline{j}_k \times \underline{j}_l)_i = N_i, \quad i=1,2,3$$

explizit (bekanntes  $\underline{j}_1 \times \underline{j}_2 = \underline{j}_3 = -\underline{j}_2 \times \underline{j}_1$  etc)

$$\begin{aligned} J_1 \dot{w}_1 - w_2 w_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{w}_2 - w_1 w_3 (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{w}_3 - w_1 w_2 (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}$$

Euler'sche Gleichungen  
im (körperfesten)  
Hauptachsen System