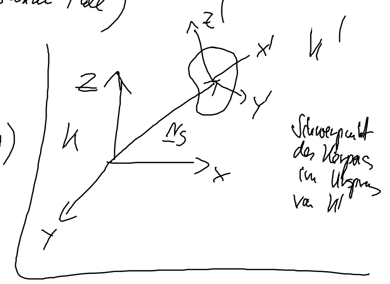
III. 6. Drehimpuls des starren Körpers

betrachte zunächst den Gesamtdrehimpuls $\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i$ (im diskreten Fall)



Im raumfesten System (K)

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times \overset{\underline{v}_i}{\dot{\underline{r}}_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_S + \underline{r}_i') \times (\underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

benutze

- $\underline{v}_i = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i'$
  (raumfest) Ortsvektor in K' (körperfestes System)

und

- $\underline{r}_i = \underline{r}_S + \underline{r}_i'$
  bezgl. K bezgl. K'

$$\Rightarrow \underline{L} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M} (\underline{r}_S \times \underline{v}_S) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_S \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')}_{\underline{r}_S \times (\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'}_{\text{Null}})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_i' \times \underline{v}_S)}_{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'\right)}_{\text{Null}} \times \underline{v}_S} + \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

$$\boxed{\underline{L} = \underbrace{M(\underline{r}_S \times \underline{v}_S)}_{\substack{\text{Schwerpunkt-} \\ \text{Drehimpuls } \underline{L}_S}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')}_{\substack{\text{Relativ-Drehimpuls} \\ \underline{L}_{rel}}}}$$

(es gehen nur „körperfeste" Vektoren $\underline{r}_i'$ und die Drehachse ein!)

analog im kontinuierlichen Fall:

$$\underline{L} = \underline{L}_S + \underbrace{\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \; \underline{r}' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')}_{\underline{L}_{rel}}$$

Bemerkungen

- Erinnerung: (s. Kap. I) Im „abgeschlossenen" System (d.h. System ohne äußere Kräfte) gilt $\dot{\underline{L}} = 0$ Erhaltung des Gesamtdrehimpulses (im raumfesten System!)

- $\underline{L}_S$ (Schwerpunktsanteil) hängt ab von $\underline{r}_S$, d.h. vom Ursprung des raumfesten Systems K

- $\underline{L}_{rel}$ ist dagegen unabhängig vom Ursprung von K !!

Umformulieren des Integranden (bzw. Summanden) von $\underline{L}_{rel}$

$$\underline{L}_{rel} = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')\, \underline{r}' \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

benutze: $\underset{\underline{r}'}{\underline{a}} \times (\underset{\underline{\omega}}{\underline{b}} \times \underset{\underline{r}'}{\underline{c}}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b})$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(\underline{\omega}\, r'^2 - \underline{r}'(\underline{\omega}\cdot\underline{r}') \right) \qquad r' = |\underline{r}'|$$

Komponenten:

$$(\underline{L}_{rel})_\mu = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(\omega_\mu r'^2 - (\underline{r}')_\mu (\underline{\omega}\cdot\underline{r}') \right), \quad \mu = 1,2,3$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(\omega_\nu \delta_{\mu\nu} r'^2 - (\underline{r}')_\mu\, \omega_\nu (\underline{r}')_\nu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \underbrace{\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(r'^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right)}_{J_{\mu\nu}\ \text{Komponenten des Trägheitstensors (in } K'\text{) !}} \omega_\nu$$

$$(\underline{L}_{rel})_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} J_{\mu\nu}\, \omega_\nu$$

Damit: $\boxed{\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega}}$ (*)

Bemerkungen:

- (*) ist analog zur Relation $\underline{p} = m\underline{v}$ für den linearen Impuls

  $(\text{bzw } \underline{P} = M \underline{v}_S)$

  beachte: Masse ist skalare Größe $\Rightarrow$ $\underline{P}$ hat dieselbe Richtung wie $\underline{v}_S$!

Anders bei $\underline{L}_{rel}$:

Da $\underline{\underline{J}}$ ein Tensor 2. Stufe ist, hat $\underline{L}_{rel}$ im Allgemeinen nicht dieselbe Richtung wie $\underline{\omega}$!

Ausnahme: $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$ (normierter) Eigenvektor von $\underline{\underline{J}}$, „Hauptträgheitsachse"

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \omega \underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i = \omega J_i \underline{j}_i \qquad \left(\text{beachte: } \underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i = J_i \underline{j}_i\right)$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \omega J_i \underline{j}_i = J_i \underline{\omega} \qquad !!$$

dann ist $\underline{L}_{rel}$ also auch parallel zu $\underline{\omega}$!

- (*) erlaubt Umformulieren des Rotationsanteils zur kinetischen Energie:

$$T^{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underbrace{\underline{\omega} \cdot \underline{L}_{rel}}$$

Projektion von $\underline{\omega}$ auf $\underline{L}_{rel}$ (bzw. umgekehrt)

III.7. Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Ausgangspunkt (s. Kap I., Newton'sche Mechanik)

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext}$$

„ext" für extern

Zeitl. Änderung des Gesamt-drehimpulses bzgl. des raumfesten Systems K

äußere Kraft auf Teilchen i

äußeres Drehmoment

Folgerungen für den Relativ-Drehimpuls

$$\underline{L}(t) = \underline{L}_S(t) + \underline{L}_{rel}(t)$$

Zeitableitung des Schwerpunktanteils

$$\frac{d}{dt}\underline{L}_S(t) = \frac{d}{dt}(M\underline{r}_S \times \underline{v}_S) = \underbrace{M\underbrace{\dot{\underline{r}}_S}_{\underline{v}_S} \times \underline{v}_S}_{\text{Null}} + M\underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S$$

$$= M\underline{r}_S \times \dot{\underline{v}}_S = M\underline{r}_S \times \ddot{\underline{r}}_S$$

$$= M\underline{r}_S \times \ddot{\underline{r}}_S = \underline{r}_S \times M\ddot{\underline{r}}_S$$

Gesamtmasse

Schwerpunktsbeschleunigung

$$\boxed{M\ddot{\underline{r}}_S = \underline{F}^{ext}_{tot}}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{L}_S(t) = \underline{r}_S \times \underline{F}^{ext}_{tot} \quad (**)$$

Gesamtkraft auf den Schwerpunkt („tot" für total)

analog zu (linearer Gesamtimpuls)

$$\frac{d}{dt}\underline{P}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{v}}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i(t) \overset{\text{Newton}}{=} \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\Big(\underbrace{\sum_{j\neq i} \underline{F}_{ij}(t)}_{\text{Kraft aus Wechselwirkung zw. } i \text{ und } j} + \underbrace{\underline{F}_i^{ext}(t)}_{\text{äußere Kraft}}\Big) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{ext}(t)$$

$$= \underline{F}^{ext}_{tot} = M\ddot{\underline{r}}_S(t)$$

Doppelsumme $\sum_i \sum_{j\neq i} \underline{F}_{ij} = 0$ wegen actio = reactio

andererseits hatten wir ja

$$\frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext} \quad (*)$$

alles im raumfesten System!

benutze nun $\underline{r}_i = \underline{r}_S + \underline{r}_i'$

aus (*): $\frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_S + \underline{r}_i') \times \underline{F}_i^{ext}$

$$= \underline{r}_S \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{ext}}_{\underline{F}_{tot}^{ext}} + \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext} \overset{(*)}{=} \underline{N}^{ext}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \underline{r}_S \times \underline{F}_{tot}^{ext} + \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext} = \underline{N}^{ext}$$

benutze jetzt noch (**) $\frac{d}{dt}\underline{L}_S(t) = \underline{r}_S \times \underline{F}_{tot}^{ext}$

$\Rightarrow$ der 2. Term kann also mit der Zeitableitung von $\underline{L}_{rel}$ identifiziert werden!

also: $$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{extern} = \underline{N}_{rel}^{ext}}$$

äußeres Drehmoment im Relativsystem ($\hat{=}$ körperfeste System K')

Beachte:

Die Zeitableitung in obiger Gleichung wird im raumfesten System genommen (denn das war unser Ausgangspunkt!)

Ziel: Herleitung einer Gleichung für $\underline{L}_{rel}$, die komplett (incl. Zeitableitung) auf das körperfeste System bezogen ist!

Erinnerung an Kap. III.2

Transformation der Zeitableitung vom raumfesten in das körperfeste System für beliebige Vektoren $\underline{G}$

$$\left(\frac{d}{dt}\underline{G}\right)_{\substack{\text{Raum}\\(K)}} = \left(\frac{d}{dt}\underline{G}\right)_{\substack{\text{Körper}\\(K')}} + \underline{\omega} \times \underline{G}$$

das hatten wir schon mehrfach benutzt!!

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'(t)$$
(K) (K')

$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt}\Big|_K = \frac{d\underline{r}_S}{dt}\Big|_K + \frac{d\underline{r}'}{dt}\Big|_K = \underbrace{\frac{d\underline{r}_S}{dt}\Big|_K}_{\underline{v}_S} + \underbrace{\frac{d\underline{r}'}{dt}\Big|_{K'}}_{\substack{\text{Null!!} \\ \text{(starrer Körper)}}} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

$$= \underline{v}_S + \underline{\omega}\times\underline{r}' \quad !$$

Anwendung auf den Relativ-Drehimpuls

$$\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_K = \frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times\underline{L}_{rel} = \underline{N}_{rel}^{ext} \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' \times \underline{F}_i^{ext} \right)$$

benutze nun

$$\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} \quad \text{und beachte, dass} \quad \frac{d}{dt}\underline{\underline{J}}\Big|_{K'} = 0 \quad !$$

Im körperfesten System ist der Trägheitstensor zeitlich konstant!

also folgt $\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel}\Big|_{K'} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\dot{\omega}}$ — Zeitableitung von $\underline{\omega}$ in K'

$$\Rightarrow \quad (*) \quad \boxed{\underline{\underline{J}}\,\underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \underline{N}_{rel}^{ext}}$$

Bewegungsgl. des starren Körpers im körperfesten System K'

($\underline{\dot{\omega}}$ ist hier Zeitabl. in K')

das sind 3 Gleichungen für die Komponenten $\mu = 1,2,3$

$\Rightarrow$ „Euler'sche Gleichungen"

Umformulierung der Vektorgleichung (*)

Zerlegung $\underline{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \, \underline{j}_i$

$\underline{j}_i$: Hauptachsen, d.h. $\underline{\underline{J}} \, \underline{j}_i = J_i \, \underline{j}_i$ (normierte Eigenvektoren)

ω_i: Komponente von $\underline{\omega}$ bzgl. $\underline{j}_i$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\omega}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{\omega}_i \, \underline{j}_i$$

Hauptachsen sind zeitl. konstant in K' !

analog: $\underline{N}^{ext}_{rel} = \sum_{i=1}^{N} N_i \, \underline{j}_i$

benutze noch $\underline{\underline{J}} \, \dot{\underline{\omega}} = \sum_{i=1}^{3} J_i \dot{\omega}_i \, \underline{j}_i$

Einsetzen in (*)

$$\sum_{i=1}^{3} J_i \dot{\omega}_i \, \underline{j}_i + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \omega_k \omega_l J_l \, (\underline{j}_k \times \underline{j}_l) = \sum_{i=1}^{3} N_i \, \underline{j}_i$$

Hauptachsen sind orthogonal zueinander $\Rightarrow$ Gleichung „zerfällt"

$$\Rightarrow J_i \dot{\omega}_i + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \omega_k \omega_l J_l \, (\underline{j}_k \times \underline{j}_l)_i = N_i \quad , \; i = 1,2,3$$

explizit (benutze $\underline{j}_1 \times \underline{j}_2 = \underline{j}_3 = -\underline{j}_2 \times \underline{j}_1$ etc)

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 \, (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 \, (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 \, (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}}$$

Euler'sche Gleichungen im (körperfesten) Hauptachsensystem