

V. Dynamische Systeme

Fragestellungen (Beispiele):

- Langzeitverhalten eines periodischen Systems (z.B. Pendel), welches kleinen Störungen unterworfen ist?
- Gibt es eine „kritische“ Stärke einer Störung, bei der sich das Verhalten des Systems grundsätzlich ändert?
- generell: Abhängigkeit von äußeren Kontrollparametern

V.1. Was ist ein dynamisches System?

Ein dynamisches System wird durch einen Satz zeitabhängiger Variablen mit der Dynamik

$$\dot{a}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N, t, \mu) \quad i=1, \dots, N$$

beschrieben

↑
Zeit

↑
zeitunabhängiger Kontrollparameter (externes Feld, Temperatur, ...)

Komponente eines Vektors \underline{f} mit N Komponenten

$$a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$$

N : Anzahl der Variablen

Vektor \underline{a} hat die Komponenten $a_i(t)$

Kurzform:
$$\dot{\underline{a}}(t) = \underline{f}(\underline{a}, t, \mu)$$

$\underline{a}(t)$:
Trajektorie

„Fluss“ des dynamischen Systems durch den Raum der Variablen

Specialfall: „autonomes System“: $\underline{f}(\underline{a}, t, \mu) = \underline{f}(\underline{a}, \mu)$

Fluss unabhängig von der Zeit

Beispiele

i) Hamilton'sche Dynamik

$$\underline{a}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t))$$

$$N = 2f$$

↑
Zahl der Freiheitsgrade

$$f_i = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} & , q_i = q_1, \dots, q_f \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} & , q_i = p_1, \dots, p_f \end{cases}$$

Komponenten des Vektors \underline{f}

Hamilton'sch.

Sei H zeitunabhängig

\Rightarrow autonomes System

(ii) Euler'sche Gleichungen (ohne äußeres Drehmoment)

$$\dot{\omega}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2$$

$N=3$

V.2. Fixpunkte und Stabilität

Wir beschränken uns auf den wichtigen Fall autonomer Systeme

Fixpunkte der Dynamik

„Ruho“ \underline{a}^0 mit

$$\left. \frac{\dot{\underline{a}}}{\underline{a}^0} = \underline{f}(\underline{a}^0, \mu) = 0 \right\} \textcircled{\#}$$

Beachte: Gleichung sagt noch nichts darüber aus, ob die Konfiguration (Fixpunkt) \underline{a}^0 stabil oder instabil ist!

⇒ Untersuche das Verhalten des dynamischen Systems bei kleinen Abweichungen der Trajektorie $\underline{a}(t)$ vom Fixpunkt \underline{a}^0

$$\hookrightarrow \underline{d}\underline{a}(t) = \underline{a}(t) - \underline{a}^0$$

Beachte dazu:

$$\frac{d}{dt}(\underline{d}\underline{a}(t)) = \frac{d}{dt}\underline{a}(t) - \frac{d}{dt}\underline{a}^0 = \frac{d}{dt}\underline{a}(t)$$

$$= \underline{f}(\underline{a}, \mu)$$

$$\approx \underbrace{\underline{f}(\underline{a}^0, \mu)}_{\text{Term nullter Ordnung}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \underline{f}}{\partial a_i} \bigg|_{\underline{a}^0} \underline{d}\underline{a}(t) + o((\underline{d}\underline{a})^2)$$

Nehme an, dass $\underline{d}\underline{a}$ kleine Abweichung!

⇒ Taylorentwicklung um Fixpunkt

⇒ In linearer Näherung („lineare Stabilitätsanalyse“)

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{q}(t) = d\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_i} \bigg|_{\mathbf{q}^0} d\mathbf{q}(t)$$

führe ein: Matrix A

mit Komponente $(\underline{A})_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \bigg|_{\mathbf{q}^0}$
 "Jacobimatrix"

$$\Rightarrow d\dot{\mathbf{q}}(t) = \underline{A} d\mathbf{q}(t)$$

A ist unabhängig von den dq!

Analyse dieser Gleichung:

- lineare homogene DGL 1. Ordnung in der Zeit!

$$d\dot{\mathbf{q}}(t) - \underline{A} d\mathbf{q}(t) = 0 \quad (**)$$

Betrachte die Situation, dass A diagonal ist (man muss also vorher diagonalisieren!)

$$\underline{A} \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \quad \text{mit } \underline{u}_i : \text{Eigenvektoren}$$

$$\lambda_i : \text{Eigenwert}$$

~~Man~~ Betrachte nun eine kleine Abweichung $d\mathbf{q}(t)$ in Richtung eines Eigenvektors

$$\text{also } d\mathbf{q}(t) = g_i(t) \underline{u}_i \quad (\text{Ansatz})$$

Einsetzen in (**)

$$\frac{d}{dt} (g_i(t) \underline{u}_i) - \underline{A} g_i(t) \underline{u}_i = 0$$

$$\text{Benutze: } \underline{A} \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} g_i(t) \underline{u}_i - \lambda_i \underline{u}_i g_i(t) = 0$$

(d.h. auch $\frac{d}{dt} g_i(t) = \lambda_i g_i(t)$, da Eigenvektoren \underline{u}_i orthogonal!)

$$\text{Lösung: } d\mathbf{q}(t) = g_i(t) \underline{u}_i = \underbrace{g_i(t=0)}_{g_i(t)} e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{a}(t) = \sum_{i=1}^N g_i(t=0) e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

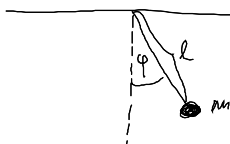
mit $g_i(t=0)$ aus Anfangsbedingungen

Wir werden sehen: Die Eigenwerte λ_i charakterisieren die "Stabilität" (zeitl. Verhalten)
 alleine!

denn: \underline{u}_i sind zeitunabhängig!

Beispiel eines Fadenpendel

erster Schritt: Aufstellen des dyn. Systems, betrachte zunächst Lagrange- und Hamiltonfunkt.



l fest:
 φ ist generalisierte Koordinate

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$

potentielle Energie: $V = -mgl(\cos\varphi - 1)$

$\varphi = 0$ (Ruhelage) : $V = 0$

$\varphi = \pi$: $V = 2mgl$

$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(\cos\varphi - 1)$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$ Lagrange-Blatt

Hamilton:

Variablen: $\varphi, p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$

$\Rightarrow \underline{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ m l^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad N=2$

Hamilton-Funkt.

$H = \dot{\varphi} p_\varphi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} p_\varphi \dot{\varphi} - mgl(\cos\varphi - 1)$
 $= \frac{p_\varphi^2}{2m l^2} - mgl(\cos\varphi - 1)$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{a}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} = \frac{a_2}{ml^2} = f_1$$

$$\dot{p}_\varphi = \dot{a}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \sin a_1 = f_2$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{a}} = \underline{f} \quad \text{mit} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{ml^2} \\ -mgl \sin a_1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte

$$\underline{\dot{a}}|_{\underline{a}^0} = \underline{f}(\underline{a}^0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \dot{a}_1 = 0 \\ \dot{a}_2 = 0 \end{matrix}$$

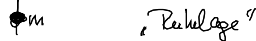
$$\Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 0 \\ a_1 = 0, \pi, 2\pi, \dots \end{matrix}$$

$a_2 = 0 \Rightarrow p_\varphi = 0 \Rightarrow$ kinetische Energie $= \frac{p_\varphi^2}{2ml^2}$ ist Null!

$a_1 = \varphi$: potentielle Energie $-mgl(\cos \varphi - 1)$ ist minimal ($\varphi=0$) oder maximal ($\varphi=2\pi$)

Betrachte nun die Stabilität der Fixpunkte

a) $a_2 = 0, a_1 = 0$
($\varphi=0$)



$$\delta \underline{\dot{a}} = \underline{A} \delta \underline{a}$$

$$(\underline{A})_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \right|_{\underline{a}^0} \Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

für den Fixpunkt $a_1 = a_2 = 0$

Eigenwerte :

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

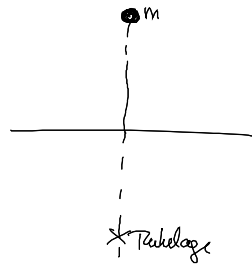
reine komplexe Eigenwerte!

$$\Rightarrow \delta \underline{a}(t) = g_1 \underline{u}_1 e^{i\omega t} + g_2 \underline{u}_2 e^{-i\omega t}$$

physikalische Interpretation:

Kleine Auslenkung aus der Ruhelage führt zu Oszillation mit Frequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ und kleinen, zeitunabhängigen Amplituden (g_1, g_2). Bewegung kommt also wieder zur Ruhe, doch wird sie größer im Laufe der Zeit!

Man sagt in diesem Fall: der Fixpunkt $a_1 = a_2 = 0$ ist stabil, er bildet ein "Zentrum" der Bewegung



b) Stabilität des Fixpunktes $a_2 = 0$ ($\hat{=} \varphi = 0$)
 $a_1 = \pi$ ($\hat{=} \varphi = \pi$)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ +mgl & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Jacobi-Matrix}$$

Eigenwerte: $\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = \lambda^2 - g/l \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{reine reelle Eigenwerte !!}$$

allg. Lösung: $\delta \underline{a}(t) = \underbrace{g_1 \underline{u}_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t}}_{\substack{\text{divergiert für} \\ t \rightarrow \infty !! \\ \underline{u}_1 \text{ ist eine} \\ \text{absteigende "Richtung" }}} + \underbrace{g_2 \underline{u}_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}}_{\substack{\text{verschwindet für } t \rightarrow \infty \\ (\underline{u}_2 \text{ ist "aufsteigende" Richtung)}}$

Da einer der Eigenwerte reell positiv ist, heißt der Fixpunkt instabil

Generell: Ist einer der Eigenwerte der Jacobi-Matrix reell positiv,
so heißt der Fixpunkt instabil!

Betrachte nun ein Pendel mit Reibung

BWGL: $ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + 2\gamma ml^2\dot{\varphi} = 0$ mit γ Reibungskonstante
 (Newton) ① ($\gamma > 0$)

wie vorher: $a_1 = \varphi, a_2 = ml^2\dot{\varphi}$

$$\dot{a}_1 = \frac{a_2}{ml^2} = f_1$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - 2\gamma ml^2\dot{\varphi} \\ &= -mgl \sin a_1 - 2\gamma a_2 = f_2 \end{aligned}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{ml^2} \\ -mgl \sin a_1 - 2\gamma a_2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: unverändert gegenüber dem reibungsfreien Fall

$$a_2 = 0, a_1 = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

betrachte Stabilität des Fixpunktes $a_1 = a_2 = 0$ (Ruhelage)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte im Falle „schwacher Reibung“ $\gamma^2 < \omega^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \underline{d}_2(t) = e^{-\gamma t} \left(g_1 e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + g_2 e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right)$$

„gedämpfte Schwingung“ !! (Realteil von $\lambda_{1,2}$ ist negativ !!)

Auslenkung $d_2(t)$ läuft gegen Null für $t \rightarrow \infty$!!
 „Fixpunkt ist stabil“

andere Fall: $\gamma^2 > \omega^2$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad \text{Realteil ist immer noch negativ}$$

\Rightarrow Fixpunkt ist stabil