

Wh: Kinetische Energie des starren Körpers.

$$T = \frac{M}{2} v_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_{\mu} J_{\mu\nu} \omega_{\nu}$$

Komponenten der Winkelgeschw.

$$T = \frac{M}{2} v_s^2 + \frac{1}{2} \omega^T \underline{\underline{J}} \omega$$

Translationsanteil
Rotationsanteil

Schwerpunkts-geschw.
Tensor 2. Stufe (Matrix) mit Komponente $J_{\mu\nu}$

Komponenten des Trägheitstensors
z.B. in Kartesischen Fall

$$J_{\mu\nu} := \int dV \rho(\mathbf{r}') \left[\begin{matrix} (r')^2 \delta_{\mu\nu} - (r')_{\mu} (r')_{\nu} \end{matrix} \right]$$

\mathbf{r}' : Vektoren im Körperfesten System (K')
 Koordinaten: Ursprung dieses Systems
 = Schwerpunkt des Körpers!

Eigenschaften:

$\underline{\underline{J}}$ ist Tensor 2. Stufe (Drehmomenten!), linear in der Masseverteilung,
 $\underline{\underline{J}}$ wird dargestellt durch reelle, symmetrische Matrix!

2) $\underline{\underline{J}}$ ist diagonalisierbar durch orthogonale Transformation (mit Hilfe einer Drehmatrix $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$)

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}^T$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

mit J_1, J_2, J_3 : Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$
 Spalten von $\underline{\underline{R}}$: Eigenvektoren von $\underline{\underline{J}}$

$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$, $\det \underline{\underline{R}} = 1$
 $\Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = 1$

„anschauliche“ Deutung:

Achsen des Körperfesten Systems K' können immer so gedreht werden, dass $\underline{\underline{J}}$ diagonal wird!!

Andere Bezeichnung:

- die Eigenwerte J_1, J_2, J_3 nennt man auch „Hauptträgheitsmomente“
- „Eigenvektoren“: „Hauptträgheitsachsen“ \Leftrightarrow diese entsprechen den neuen Achsen von K' nach der Drehung!!

\Rightarrow „Hauptachsensystem“

Im Hauptachsensystem hat \underline{J} dann die (explizite) Form

$$\underline{J}' = \int dV \rho(\underline{r}) \begin{pmatrix} Y_2^2 + Y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1^2 + Y_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1^2 + Y_2^2 \end{pmatrix}$$

erhält sich aus der Def. von J_{ij} für den diagonalen Fall!

Y_i sind die Hauptachsen des Körpers \underline{K}

$\Rightarrow J_i \geq 0 \quad (i=1,2,3)$: Die Matrix ist positiv semidefinit

Praktische Durchführung der Diagonalisierung

Eigenwerte aus dem charakteristischen Polynom

$$\det(\underline{J} - \lambda \underline{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

\rightarrow die drei Lösungen für λ entsprechen den Eigenwerten J_1, J_2, J_3

Eigenvektoren (Hauptachsen) aus dem homogenen, linearen Gleichungssystem

$$\underline{J} \underline{j}_i \stackrel{!}{=} J_i \underline{j}_i$$

Eigenvektoren von \underline{J}
Zum Eigenwert J_i
($i=1,2,3$)

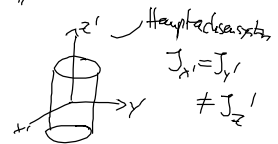
Beacht: Man nennt starke Körper mit

- $J_1 \neq J_2, J_1 \neq J_3, J_2 \neq J_3$
- $J_1 = J_2 \neq J_3$ (oder analog für andere Kombinationen)
- $J_1 = J_2 = J_3$

„asymmetrischer Körper“

„symmetrischer Körper“

„Kugelsymmetrischer Körper“



Noch eine weitere Bezeichnung:

Sei n beliebige Achse

\Rightarrow die Größe $J_n = n \cdot \underline{J} \cdot n$ heißt Trägheitsmoment bzgl. der Achse n

Rotationsenergie des Kugelrotors

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{J} \underline{\omega}$$

(Erinnere dich: Richtung von $\underline{\omega}$ entspricht Drehachse!)

normiert, $|\underline{j}_i| = 1$

Falls speziell $\underline{\omega}$ parallel zu einer der drei Hauptträgheitsachsen \underline{j}_i

d.h. $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$
 $\omega = |\underline{\omega}| \Rightarrow \underline{J} \underline{\omega} = \underline{J} \omega \underline{j}_i = J_i \omega \underline{j}_i$

benutze $\underline{j}_i \cdot \underline{j}_i = 1$

$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega \underline{J} \omega = \frac{1}{2} \omega J_i \omega \underline{j}_i \cdot \underline{j}_i = \frac{1}{2} \omega^2 J_i$$

\uparrow
 $\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i$

$\underline{j}_i \cdot \underline{j}_i = 1$

allgemein:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{J} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{R} \underline{J} \underline{R}^T \underline{\omega}$$

benutze $\underline{R} \underline{R}^T = \underline{1}$
 und $\underline{R}^T = \underline{R}^{-1} \Rightarrow \underline{R} \underline{R}^T = \underline{1}$
 $\underline{R}^T \underline{R} = \underline{1}$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{R}^T \underline{R} \underline{J} \underline{R}^T \underline{R} \underline{\omega}$$

\underline{J}' : diagonal!!

$$\underline{R} \underline{\omega} = \underline{\omega}'$$

$$(\underline{\omega} \underline{R}^T) = (\underline{\omega}')^T$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega}' \underline{J}' \underline{\omega}'$$

Folgerung

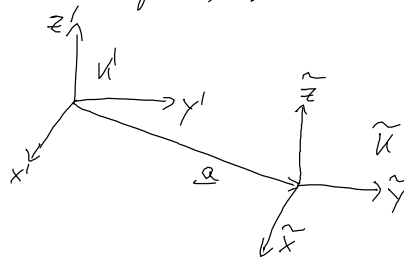
$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega'_\mu \underbrace{J'_{\mu\nu}}_{J'_\mu \delta_{\mu\nu}} \omega'_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \omega'^2_\mu J'_\mu$$

Hauptträgheitsmomente!

III.5. Der Satz von Steiner

Sei \underline{J} der Trägheitstensor in einem (im Schwerpunkt S verankerten) körperfesten System K' .

Sei \tilde{K} ein zu K' achsenparalleles (nicht gedreht!), um einen Vektor \underline{a} verschobenes Koordinatensystem



Dann ist $\tilde{\underline{J}}$, d.h. der Trägheitstensor bezgl. \tilde{K} , gegeben durch

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M (\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_{\mu} (\underline{a})_{\nu}) \quad \text{Satz von Steiner!}$$

Man muß also "nur" die Komponente von \underline{J} in einem Koordinatensystem kennen und kann damit die Komponente in einem anderen System hinschreiben!
dazu

Beweis

zunächst Vektorelement:

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\tilde{r} \tilde{\rho}(\tilde{r}) \left(\tilde{r}^2 \delta_{\mu\nu} - (\tilde{r})_{\mu} (\tilde{r})_{\nu} \right) \quad \text{Def. von } \underline{J} \text{ in } \tilde{K}$$

Integrierte in \tilde{K}

benutze $\tilde{\underline{r}} = \underline{r}' + \underline{a}$

$$= \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left((\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} + 2 \underline{a} \cdot \underline{r}' \delta_{\mu\nu} + \underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} \right) - \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')_{\mu} (\underline{r}')_{\nu} + (\underline{r}')_{\mu} (\underline{a})_{\nu} + (\underline{r}')_{\nu} (\underline{a})_{\mu} + (\underline{a})_{\nu} (\underline{a})_{\mu} \right]$$

benutze nun: $\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \mathbf{0}$!!

Schwerpunkt liegt jetzt wieder im Ursprung von \mathcal{K}' !

\Rightarrow alle Terme linear in \mathbf{r}' oder in einer Komponente von \mathbf{r}' verschwinden!!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{J}_{\mu\nu} &= \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left((\mathbf{r}')^2 d_{\mu\nu} - (\mathbf{r}')_{\mu} (\mathbf{r}')_{\nu} \right) \\ &\quad + \underbrace{\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')}_{M} \left[a^2 d_{\mu\nu} - (a)_{\mu} (a)_{\nu} \right] \\ &= J_{\mu\nu} + M \left(a^2 d_{\mu\nu} - (a)_{\mu} (a)_{\nu} \right) \end{aligned}$$

beachte =
 \underline{a} ist konstanter Vektor!

q. e. d.

(natürlich!)
gilt auch im diskrete Fall:

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\tilde{r}_i^2 d_{\mu\nu} - (\tilde{r}_i)_{\mu} (\tilde{r}_i)_{\nu} \right)$$

, benutze $\tilde{r}_i = \mathbf{r}'_i + \underline{a}$

$$\begin{aligned} &\dots \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left((\mathbf{r}'_i)^2 d_{\mu\nu} - (\mathbf{r}'_i)_{\mu} (\mathbf{r}'_i)_{\nu} \right) \Bigg\} J_{\mu\nu} \\ &\quad + M \left(a^2 d_{\mu\nu} - (a)_{\mu} (a)_{\nu} \right) \end{aligned}$$

Einsetzen und benutze, dass

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$$

Schwerpunkt im Ursprung!

$$\sum_{i=1}^N m_i = M$$

Folgerungen aus dem Satz von Steiner

- Für das Trägheitsmoment bezgl. einer beliebigen Achse \underline{n} gilt im System $\tilde{\mathcal{K}}$:

$$\tilde{J}_n = \underline{n} \underline{\tilde{J}}_n = \sum_{\mu\nu} n_\mu J_{\mu\nu} n_\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, 3$$

(einsetzen: $J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M(a^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a} \otimes \underline{a})_{\mu\nu})$)

$$= \sum_{\mu\nu} n_\mu J_{\mu\nu} n_\nu + M a^2 \sum_{\mu\nu} n_\mu \delta_{\mu\nu} n_\nu - M \sum_{\mu\nu} n_\mu a_\mu n_\nu a_\nu$$

$$= \underline{n} \underline{J}_n + M a^2 \underline{n}^2 - M (\underline{a} \cdot \underline{n})^2$$

also: $\boxed{\tilde{J}_n = J_n + M(a^2 - (\underline{a} \cdot \underline{n})^2)} \quad (*)$

Sei speziell \underline{n} eine der Hauptachsen von \underline{J} , also $\underline{n} = \underline{j}_i$ ← normierter Eigenvektor
 (also $\underline{J} \underline{j}_i = J_i \underline{j}_i$ bzw. $\underline{J} \underline{n} = J_i \underline{n}$)

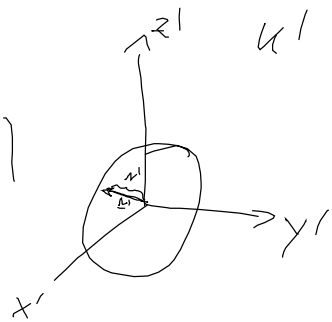
Dann folgt aus (*)

$$\tilde{J}_i = J_i + M(a^2 - a_i^2) \quad \text{mit } a_i = \underline{a} \cdot \underline{n} = a \cdot j_i$$

Anwendungsbeispiel (Trägheitskugel, Satz von Steiner)

Kugelsymmetrische Massenverteilung

$$\rho(\underline{r}') = \rho(r') \quad \text{mit } r' = |\underline{r}'|$$



Es gilt:

\underline{J} (bezgl. \mathcal{K}') ist diagonal in allen

Koordinatensystemen, die im Schwerpunkt der Kugel verankert sind !!

$$\Leftrightarrow J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad (\text{Nebendiagonalelemente})$$

dem z.B.

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left((\underline{r}')^2 \overset{0}{d_{xy}} - x' y' \right) = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') (-x' y') \\
 &= \int_0^{\infty} dr' r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(-\frac{r' \sin \vartheta' \cos \varphi'}{x'} \frac{r' \sin \vartheta' \sin \varphi'}{y'} \right) \\
 &\quad \text{Auswertung in Kugelkoordinat} \\
 &= \dots = 0 \text{ wegen der } \varphi' \text{-Integration !!}
 \end{aligned}$$

und : $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J$
 $(J_1 = J_2 = J_3)$

benutze Def. von $J_{\mu\nu}$ in U'

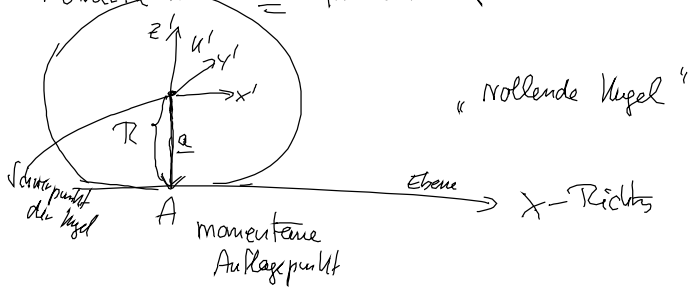
Berechnung von J

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{3} (J_1 + J_2 + J_3) = \frac{1}{3} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(\underbrace{y'^2 + z'^2}_{\text{aus } J_{xx}} + \underbrace{x'^2 + z'^2}_{\text{aus } J_{yy}} + \underbrace{x'^2 + y'^2}_{\text{aus } J_{zz}} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \sum r'^2 \quad \text{Integrand hängt nicht von den Winkeln ab!} \\
 &= \frac{2}{3} 4\pi \int_0^{\infty} dr' r'^2 \cdot r'^2 \rho(r')
 \end{aligned}$$

Sei speziell $\rho(r') = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$, $r' < R$, (Null für $r' > R$)
 homogene Massenverteilung !!

$$\Rightarrow J = \frac{2}{R^3} M \int_0^R dr' (r')^4 = \frac{2}{5} M R^2$$

betrachte nun \underline{J} für die Kugel in einem anderen Koordinatensystem



Trägheitstensor bezgl. ein Koordinatensystem \tilde{U} zuehrt in A ?

Satz von Steiner mit $\overset{\text{Radius}}{a} = -R \hat{e}_z$, ($|a| = R$ Kugelradius)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{x'} &= \overset{\text{bezgl. } U'}{J_x} + M(a^2 - (a \cdot \hat{e}_x)^2) \\ &= J + M(a^2 - \frac{a_x^2}{0}) = J + MR^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{wegen Massenzentrums} \\ = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2 \end{array} \right) \\ & \left(= \tilde{J}_{x'} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_{z'} = J + M(a^2 - (a \cdot \hat{e}_z)^2) = J + M(R^2 - R^2) = J = \frac{2}{5} MR^2$$

Trägheitstensor der Kugel ist in \tilde{U} (zuehrt in A)

immer noch diagonal, aber nicht mehr kugelsymmetrisch !!

↳
hier nicht explizit gezeigt,
aber leicht zu sehen!