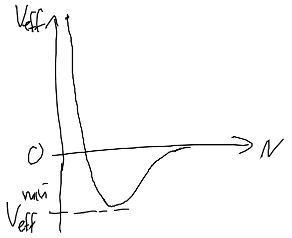
Anschluss Kepler-Problem

Gravitationskraft zw. 2 Planeten

$\Rightarrow$ effektives Einteilchenproblem mit effektivem Potential $V_{eff}(r) = -\gamma \frac{\mu M}{r} + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}$

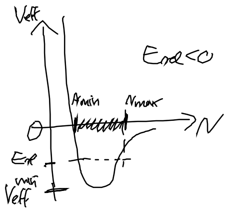
Gravitation (attraktiv) — Drehimpulsbarriere (repulsiv)

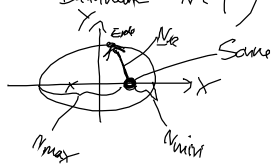
$r = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$



Fallunterscheidung bezgl. E_{rel} — Relativ-Energie (konstant!)

i) $\underline{E_{rel} < 0}$: Bahnkurve $r(\varphi)$ ist Ellipse, in deren Brennpunkt die Sonne steht





$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $\quad (\varepsilon < 1)$ $\qquad p = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$

mit a, b Halbradien
ε Exzentrizität
$e^2 = a^2 - b^2$

„gebundene Bewegung"

1. Kepler'sches Gesetz !! (Bewegung auf Ellipse)

2. Kepler'sches Gesetz:

Der „Fahrstrahl" (d.h. der Vektor $\underline{r}_{12}(t)$) von Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen!

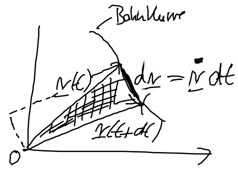
Folgt aus der Drehimpulserhaltung!

$\dot{\underline{L}}_{rel} = 0$, $\underline{L}_{rel} \cdot \underline{r}_{12}(t) = 0 \quad \forall t$

Bewegung verläuft in einer Ebene $\perp \underline{r}_{12}$ (Bahnebene)

definiere:

dS : Fläche, die in der Bahnebene in der Zeit dt überstrichen wird



$dS = \frac{1}{2} \underbrace{|\underline{r}(t) \times \underline{r}(t+dt)|}_{\text{Parallelogramms}}$ für kleine dt!

benutze $\underline{r}(t+dt) \approx \underline{r}(t) + \dot{\underline{r}}(t)\,dt$

Notation: $\underline{r}(t) = \underline{r}_{12}(t)$

Taylorentw. bis zu 1. Ord.

$$dS = \frac{1}{2} \left| \underline{r}(t) \times \left(\underline{r}(t) + \dot{\underline{r}}(t)\, dt \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}}(t)\, dt \right| \qquad \text{wegen } \underline{r} \times \underline{r} = 0$$

$$= \frac{1}{2}\, dt \left| \underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}}(t) \right|$$

benutze: $\underline{L}_{rel} = \left(\underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}}(t) \right) \mu$

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{2}\, dt\, \frac{1}{\mu} \left| \underline{L}_{rel} \right| = \frac{1}{2\mu}\, dt\, L_{rel} \quad , \qquad L_{rel} = \text{const}!$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\mu} L_{rel} = \text{const}\ !$$

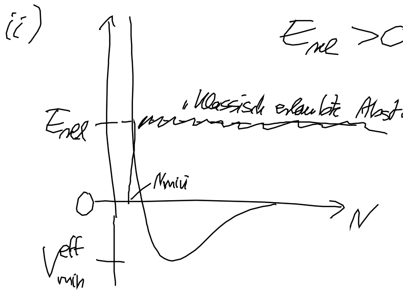
Änderung der überstrichenen Fläche pro Zeiteinheit ist eine Konstante!

3. Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben (dritte Potenz) der großen Halbachsen! (hier nicht gezeigt!)

Zurück zur Fallunterscheidung bezgl. E_{rel}

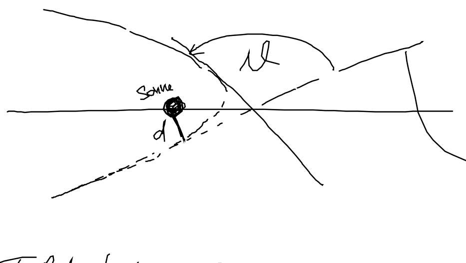
ii) $E_{rel} > 0$



: Teilchen können ins Unendliche gelangen!

Es stellt sich heraus: Bahnkurve $r(\varphi)$ ist Hyperbel

$\left(r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \right.$, mit $\varepsilon > 1$



Bahn ohne Beeinflussung (Ablenkung) durch das Kraftzentrum (Sonne)

Teilchenbahn wird um den Winkel ϑ abgelenkt!

es gilt: $$d = \frac{L_{rel}}{\sqrt{2m E_{rel}}} \quad , \quad \tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma}{2}\,\frac{Mm}{d\,E_{rel}}$$

Bemerkung: Dieser Fall ist auch wichtig in der Atomphysik

$\Rightarrow$ Ablenkung geladener Teilchen am positiv geladenen Atomkern

(hier ist die ~~[illegible]~~ relevante Kraft die Coulombkraft)

e) Abschließende Bemerkungen zum Keplerproblem

- Wir hatten gesehen: Allgemein gibt es für Zentralkräfte 2 Erhaltungsgrößen, nämlich E_{rel} und L_{rel}

  Speziell für das Keplerproblem ($V(r) \sim \frac{1}{r}$) gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, nämlich den Runge-Lenz-Vektor:

  $$\underline{A} = (\underline{v} \times \underline{L}) + V(r)\,\underline{r} \quad , \quad \dot{\underline{A}} = 0 \quad !$$

  $\Rightarrow$ Übungszettel

- Unsere (bisherige) Betrachtung der Planetenbewegung basiert auf Idealisierung des Problems!

  – In Wirklichkeit wechselwirken mehr als 2 Planeten (Anwesenheit von Nachbarplaneten)!

  Wir müssen Mehrkörperprobleme ($N>2$) betrachten. Schon das 3-Körperproblem ist aber nur numerisch lösbar!

  – Abweichungen der Form der Massenkörper von der idealen Kugelgestalt

  $\Rightarrow$ Keine homogene Massenverteilung!

- Allgemeine Relativitätstheorie

  $\Rightarrow$ es gibt (sehr kleine) Korrekturen zum $\frac{1}{r}$ – Gravitationspotential

Führende relativistische Korrektur: $\tilde{V}(r) = -\frac{\alpha}{r}\left(1 + \frac{L^2}{r^2 c^2}\right)$ $\alpha = \text{Const} > 0$

Drehimpuls

Lichtgeschwindigkeit

Korrektur

Konsequenz:

Bahnkurve ist keine komplett geschlossene Ellipse mehr !!

der gebundenen Bewegung

kleine Änderung der Bahnachse bei jedem Umlauf !

I.6. Energie-Erhaltung und Dissipation

Wir hatten gesehen:

Lösung des Zweikörperproblems baut entscheidend auf Erhaltungsgrößen auf (Energie, Impuls, Drehimpuls)

Frage (allgemein):

Was passiert bei Anwesenheit dissipativer Kräfte (Reibung)?

Ausgangspunkt:

Newton: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$ Gesamtkraft auf Teilchen

multipliziere mit $\dot{\underline{r}}_i$ und summiere über $i = 1, \ldots, N$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

(analog Kap. I.4)

Zerlege nun: $\underline{F}_i = -\nabla_i V + \underline{F}_i^{\text{diss}}$

Konservativer Anteil (mit $V = V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$)

dissipativer Anteil

z.B. $\underline{F}_i^{\text{diss}} = -\tilde{\gamma}\, \dot{\underline{r}}_i$

Reibungskonstante

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i}_{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\underline{r}}_i)^2\right)}_{T}} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{N} \nabla_i V \cdot \dot{\underline{r}}_i}_{-\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} V(\underline{r}_1, \ldots \underline{r}_N)\right)}_{V}} + \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{diss} \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

T: Kinetische Energie

V: potentielle Energie

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{(T+V)}_{\text{Gesamtenergie}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{diss} \cdot \dot{\underline{r}}_i} \quad (*)$$

Zeitliche Änderung der Gesamtenergie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte

(*) ist als Verallgemeinerung der Aussage

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{in konservativen Systemen}$$

II. Kanonische Mechanik: Lagrange-Formalismus

II.1. Motivation

Newton'sche Mechanik

$\rightarrow$ BWGL für N-Teilchensysteme, meist in kartesischen Koordinaten

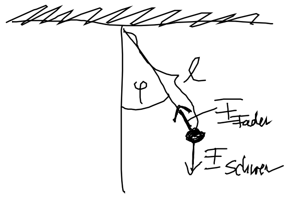
In vielen Fällen unterliegt die Bewegung der Teilchen bestimmten „Zwangsbedingungen", die wiederum von „Zwangskräften" hervorgerufen werden

Folgen:

- möglicherweise Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems
  - ohne Zwangsbedingungen hat man in einem System von N Punktteilchen $f = 3N$
  - mit Zwangsbedingungen: $f \leq 3N$!
- Newton'sche Formulierung der Mechanik wird "unbequem", z.B. ist häufig eine genaue Angabe der Zwangskräfte unmöglich!

Beispiel

Bewegung eines Massenpunktes am Fadenpendel (Ebene)



Es wirkt: – die Schwerkraft ($\underline{F}_{schwer}$) (vorgegeben, angebbar)

– die „Fadenkraft", die dafür sorgt, dass der Massenpunkt am Pendel fest hängt, so dass $\underbrace{l}_{\text{Fadenlänge}} = const$!

Diese Fadenkraft ist Beispiel für Zwangskraft

hier:

Reduktion von Freiheitsgraden:

ohne Faden: $f = 2$ ($N=1$, Bewegung in der Ebene)

mit Faden: $f = 1$ (Winkel φ)

Lagrange-Mechanik

Allgemeinere Formulierung der Mechanik, die eine einfachere Handhabung von Zwangsbedingungen ermöglicht!

II.2. Klassifizierung von Zwangsbedingungen

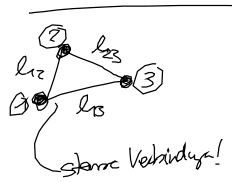
i) holonome Zwangsbedingungen

beschreibbar durch eine geschlossene Gleichung für die Koordinaten in der Form

$$f_\lambda(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0 \quad , \text{ wobei } \lambda = 1, \ldots, p$$

(p: Zahl der unabhängigen Zwangsbedingungen!)

Beispiel: Starrer Körper aus 3 Massenpunkten



mit $l_{12} = const$

$l_{13} = const$

$l_{23} = const$

$N = 3$

$\Rightarrow 3$ holonome Zwangsbedingungen:

$$f_1 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2| - l_{12} = 0$$

$(p=3)$

$$f_2 = |\underline{r}_1 - \underline{r}_3| - l_{13} = 0$$

$$f_3 = |\underline{r}_2 - \underline{r}_3| - l_{23} = 0$$

Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade:

$$f = 3N - p$$
$$= 3\cdot 3 - 3 = 6$$

Beispiel für Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade durch p Zwangsbed.!

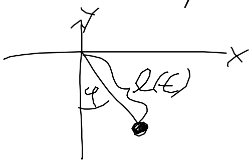
Bemerkung:

Die Zwangsbed. beim starren Körper sind nicht nur holonom, sondern auch „skleronom", d.h. nicht explizit zeitabhängig!!

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = 0 \quad \forall \lambda = 1, \ldots, p$$

Holonome Zwangsbed. können auch zeitabhängig („rheonom") sein

Beispiel: Ebenes Fadenpendel mit variabler Länge $(p=1)$



$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - \overset{\text{Fadenlänge}}{l(t)}}_{f(x,y,t)} = 0$$

$$f = 1$$

ii) Nicht-holonome Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ nicht darstellbar in der Form $f(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$

Im allgemeinen keine Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade

mögliche Form:

$$\sum_{i=1}^{N} \underset{\substack{\text{Vektor}\\ (N\text{-dimensional})}}{\underline{a}_{\lambda,i}}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)\cdot d\underline{r}_i + \underset{\text{Skalar}}{a_\lambda}(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t)\, dt = 0 \quad , \quad \lambda = 1, \ldots, p$$

dividiere durch dt:

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i} \cdot \underbrace{d\underline{v}_i}_{} + a_\lambda = 0$$

Teilchengeschwindigkeit

Die Bedingungen enthalten also nicht nur die Koordinaten (und die Zeit) so wie im holonomen Fall!!

Beispiel: „Rangieren" mit dem Auto.
momentane Bewegung wird nicht nur durch die Position, sondern auch durch die Radrichtung bestimmt!
(d.h. Richtung der Geschw.)