II 12. Der Hamilton-Formalismus

→ neue Formulierung der Mechanik!

bisher:

- Newton-Mechanik: sehr allgemeines Konzept (Newton'sche Axiome), läßt alle Typen von Kräften zu, aber etwas „unhandlich" für Systeme mit Zwangskräften!
  (relevante Größe: $\underbrace{r_i(t)}_{\text{Trajektorie}}$)

- Lagrange-Mechanik:
  großer Vorteil im Vergleich zu Newton:
  Eliminierung der Zwangskräfte!
  ⟺ die relevanten Größen sind die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$

  BWGL aus Hamilton'schem (oder d'Alembert'schem) Prinzip
  holonome, konservative Systeme: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, $k = 1, \ldots, f$

  f Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit für die $q_k(t)$

Warum nun noch eine neue Formulierung?

Für bestimmte Erweiterungen (Quantenmechanik, Statistische Physik) ist es vorteilhaft, statt den Variablen $\{q_k\}$ und $\{\dot{q}_k\}$ die Variablen $\{q_k\}$ und die dazugehörigen generalisierten Impulse $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ zu benutzen!!

also:

Lagrange → Hamilton

$\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t \longrightarrow \{q_k\}, \{p_k\}, t$

neuer Satz unabhängiger Variablen!

Wir werden sehen:
Hamilton-BWGL bilden einen Satz von $2f$ Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Zeit für die $\{q_k\}, \{p_k\}$

Die Variablentransformation wird mit Hilfe der sogenannten Legendre-Transformation durchgeführt

Exkurs: Legendre-Transformation

Zunächst eindimensional:

Gegeben: Funktion $f(x)$ mit $\frac{df(x)}{dx} = z$ Steigung von f bei x

Ziel: Statt x soll z als Variable verwendet werden.

Definition die Legendre-Transformierte von f bzgl. x:

$$\mathcal{L} f(x) := x \frac{df}{dx} - f(x)$$

$$= \varphi(z) z - f(\varphi(z))$$

$$=: G(z)$$

führe ein $\varphi(z) = x$

Annahme: der Zusammenhang $z = \frac{df}{dx}$ läßt sich nach x auflösen!

Voraussetzung: $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \neq 0$

denn falls z unabhängig von x, dann kann man nicht nach x auflösen!

Bemerkungen

- Die Funktion G hat als "richtige" Variable tatsächlich (nur) z (und nicht x)!

Betrachte dazu das Differential

$$dG = d\left(x \frac{df}{dx} - f(x)\right)$$

$$= \underbrace{\cancel{dx \cdot \frac{df}{dx}}}_{\text{Produktregel}} + x \cdot d\left(\frac{df}{dx}\right) - \cancel{\frac{df}{dx} dx}$$

$$= x\, d\left(\frac{df}{dx}\right) = x\, dz$$

hieran sieht man, dass jetzt z die richtige Variable ist

außerdem:

$$x = \frac{dG}{dz}, \quad \frac{d^2G}{dz^2} = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{dz/dx} \neq 0$$

- Zweimaliges Ausführen der Legendre-Transformation

$$\mathcal{L}\underbrace{\mathcal{L}f(x)}_{G(z)} = \mathcal{L}\,G(z)$$

von vorhin: $G = xz - f$

$$= z\,\frac{dG(z)}{dz} - G = zx - xz + f = f$$

führt also wieder auf die Ausgangsfunktion zurück!!

Insgesamt: Die Transformation $f \to \mathcal{L}f = G$
ist umkehrbar eindeutig (falls $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \neq 0$)

Beispiel:

$f(x) = \alpha x^2 \quad \Rightarrow z(x) = \frac{df}{dx} = 2\alpha x$ also $\frac{dz}{dx} \neq 0$

$$\Rightarrow x = \varphi(z) = \frac{z}{2\alpha}$$

Transformation:

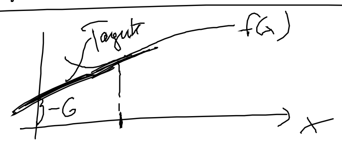
$$\mathcal{L}f(x) = x\,\overbrace{\frac{df}{dx}}^{z} - f = x\cdot\overbrace{2\alpha x}^{z} - \overbrace{\alpha x^2}^{f}$$

$$= \underbrace{\frac{z}{2\alpha}}_{x}\cdot z - \alpha\underbrace{\left(\frac{z}{2\alpha}\right)^2}_{x^2} = \frac{z^2}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = +\frac{z^2}{4\alpha} = G(z)$$

$$\mathcal{L}G(z) = z\,\frac{dG}{dz} - G$$

$$= z\cdot\frac{z}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = \frac{z^2}{4\alpha} \overset{z=2\alpha x}{\underset{!}{=}} \frac{(2\alpha x)^2}{4\alpha} = \alpha x^2 = f(x)$$

- Graphische Veranschaulichung der Legendre-Transformation



$$G(z) = x\cdot\underbrace{\frac{df}{dx}}_{z} - f \quad , \quad x = \varphi(z)$$

~~Tang~~ Tangentengleichung bei x:

$$y = ax + b \quad \text{mit } a = \frac{df}{dx}$$

$$b = f(x) - ax$$
$$= f(x) - \frac{df}{dx} x$$

$$\Rightarrow y = x \frac{df}{dx} + \underbrace{\left(f(x) - \frac{df}{dx} x \right)}_{-G}$$

Die ursprüngl. Funktion $f(x)$ wird nach der Legendre-Transformation durch die Steigung $\frac{df}{dx} = z$ und den negativen Achsenabschnitt auf der y-Achse charakterisiert!

Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf mehrere Variablen

gegeben: $F(\{x_l\}, \{u_l\})$ mit $l = 1, \dots, m$

Legendre-Transformation bzgl. des Variablensatzes $\{x_l\}$

$$\mathcal{L} F := \sum_{l=1}^{m} x_l \frac{\partial F}{\partial x_l} - F(\{x_l\}, \{u_l\})$$

$$= G(\{z_l\}, \{u_l\}) \quad \text{mit } z_l = \frac{\partial F}{\partial x_l}$$

Umkehrbar eindeutig, falls $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} \right) \neq 0$

Ende Exkurs

Anwendung auf die Lagrangefunktion

$$L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

Ziel: ersetze die $\{\dot{q}_k\}$ durch $\{p_k\}$ mit $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

$$\mathcal{L} L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} - L$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L \quad =: H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

Hamiltonfunktion

Die Hamiltonfunktion ist also die ~~tr~~ Legendretransformierte der Lagrangefunktion bzgl. der generalisierten Geschwindigkeiten!

Betrachte das Differential:

$$dH = d\left(\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{f} d\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \, d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - dL$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{f} d\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} + \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \, d\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k}\Big) \underbrace{- \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \cancel{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t} dt}_{dL}$$

$$\boxed{dH = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \, dp_k - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt} \quad (*)$$

nächste Frage:
Wie erhält man nun Bewegungsgleichungen?

Vergleiche ~~dazu~~ (*) mit dem Differential von H, das sich einfach aus der Tatsache $H = H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$ ergibt:

$$\boxed{dH = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt} \quad (**)$$

Koeffizientenvergleich der Differentiale (*) und (**) (diese müssen gleich sein!!)

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad k = 1, \ldots, f}$$

Hamilton'sche Bewegungsgleichungen (auch: kanonische Gleichungen)

Bemerkungen

- Die Hamilton'schen BWGL bilden 2 Sätze von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die $\{q_k\}$, $\{p_k\}$

- Der 2f-dimensionale Raum $\Gamma := (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ heißt „Phasenraum"

  (wichtig in der Mechanik, z.B. Oszillator, aber auch z.B. in der Statistischen Physik, wo man Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\rho(\Gamma)$ für Vielteilchensysteme betrachtet!)

- Physikalische Bedeutung der Hamilton-Fkt.

  für konservative Systeme mit holonom-skleronomen Zwangsbedingungen

$$L = T - V, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{2T} - L = 2T - L$$

$$= 2T - (T - V)$$

$$= T + V$$

$$= E \quad \text{Gesamtenergie !!}$$

Für derartige Systeme hatten wir bereits gesehen, dass die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße ist (Zeittranslationssymmetrie)

Nochmaliger Nachweis im Hamilton-Formalismus

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \right)}_{0} + \underbrace{\left(-\frac{\partial L}{\partial t} \right)}_{0 \text{ für System mit nicht explizit zeitabh. Potential}}$$

Hamilton'sche BWGL

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const} \; !!$$

Anwendungsschema des Hamilton-Formalismus

1) Wähle generalisierte Koordinaten $\{q_k\}$ und bestimme die Transformationsformel $r_i = r_i(q_1, \dots, q_f, t)$

2) Bestimme T, V (falls System konservativ) und Lagrange-Fkt. $L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$

3) Finde die generalisierten Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \rightarrow \quad p_k = p_k(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

und umgekehrt $\dot{q}_k = \dot{q}_k(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$

4) Stelle die Hamilton-Funktion auf.

allg.: $$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L$$ (Legendre-Transformation)

speziell: konservatives, skleronomes System: $H = T + V$

5) Aufstellen und Lösen der Hamilton'schen BWGL.

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$$

$\left(\text{und } \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\right)$