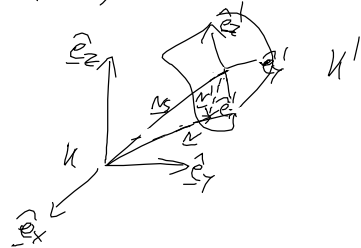


Raumfestes Koordinatensystem (K) \rightarrow Körperfestes System (K')
 Inertialsystem i.A. kein Inertialsystem
 (Beschleunigte Rotation)

$$\dot{\underline{v}}(\underline{r}) \Big|_K = \dot{\underline{v}}_S(\underline{r}) \Big|_K + \dot{\underline{v}}'(\underline{r}) \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Nützlich für einen
 echten starren Körper,
 in dem alle Massenpunkte \underline{r}'
 relativ zum Ursprung von K'
 fixiert



$$\Rightarrow \dot{\underline{v}}(\underline{r}) \Big|_K = \dot{\underline{v}}_S(\underline{r}) \Big|_K + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

BWGL: $m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ (Newton)

$$\text{in } K': m \dot{\underline{v}}'(\underline{r}) \Big|_{K'} = \underline{F} - m \dot{\underline{v}}_S \Big|_K + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m(\underline{\omega}' \times \underline{r}')$$

\underline{F}_C Coriolis \underline{F}_Z Zentrifugalkraft
 Scheinkräfte!

(III.3. Kinetische Energie, Trägheitstensor)

\rightarrow echter starrer Körper, Ursprung des Körperfesten Systems = Schwerpunkt dieses Körpers!

diskrete Massen: $\underline{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i$ (in K)

aber $\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i' = \dots = 0$
in K'

analog
 kontinuierliche Massenverteilung: $\int_{\text{in } K'} \underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{r}' = 0$, $\underline{r}_S = \frac{1}{M} \int_{\text{in } K} \underline{r} \rho(\underline{r}) \underline{r}$

Beharke nun die kinetische Energie T

a) diskrete Massenverteilung

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

Geschw. bezgl. K

\underline{r}_i' : Ortsvektor von
dem Massepunkt
bezgl. Ursprung von
 K' (= Schwerpunkt)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_S^2 + \underline{v}_S \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

benutze $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$
 $= \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$
 $= (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_S^2 + \underbrace{(\underline{v}_S \times \underline{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i'}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

nach Voraussetzung!

$$= \frac{1}{2} v_S^2 \sum_{i=1}^N m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

M

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2} v_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2$$

Umformen des 2. Terms:

$$(\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2 = \omega^2 |\underline{r}_i'|^2 \sin^2 \alpha_i$$

$$= \omega^2 |\underline{r}_i'|^2 (1 - \cos^2 \alpha_i)$$

wobei α_i der Winkel zw. $\underline{\omega}$ und \underline{r}_i' ist

$$(\underline{a} \times \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi \quad \begin{matrix} \vec{b} \\ \swarrow \\ \vec{a} \end{matrix}$$

$$\omega = |\underline{\omega}|$$

$$= \omega^2 |\underline{r}_i'|^2 - \frac{\omega^2 |\underline{r}_i'|^2 \cos^2 \alpha_i}{(\underline{\omega} \cdot \underline{r}_i')^2}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$$

benutze:

$$\omega^2 = |\underline{\omega}|^2 = \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = \sum_{\mu=1}^3 \omega_\mu^2$$

ω_μ ist Komponente von $\underline{\omega}$

$$(\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \left(\sum_{\mu=1}^3 a_\mu b_\mu \right)^2 = \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 a_\mu b_\mu a_\nu b_\nu$$

$$\Rightarrow (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')^2 = \sum_{\mu=1}^3 \omega_\mu^2 |\underline{r}_i'|^2 - \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_\mu \omega_\nu (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu$$

$$= \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_{\mu} \left[\delta_{\mu\nu} (\underline{r}_i')^2 - (\underline{r}_i')_{\mu} (\underline{r}_i')_{\nu} \right] \omega_{\nu}$$

Einsetzen in den Ausdruck für kinetische Energie

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{M}{2} \underline{v}_S^2}_{\text{Translationsanteil (wie bei Punktmechanik)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_{\mu} J_{\mu\nu} \omega_{\nu}}_{\text{Rotationsanteil}}$$

mit dem Trägheitstensor $J_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^N m_i \left((\underline{r}_i')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_{\mu} (\underline{r}_i')_{\nu} \right)$

(für diskrete Massenverteilung)

$J_{\mu\nu}$ hängt ab von der spezifischen Massenverteilung (also den Vektoren \underline{r}_i')

Beacht. Der Rotationsanteil von T ist quadratisch in den Winkelgeschwindigkeiten (analog zum ^{quadratisch} Abhängigkeit des Translationsanteils von \underline{v}_S)

aufßerdem: Analogie Masse — Trägheitstensor

b) Kontinuierliche Massenverteilung

$$T = \frac{1}{2} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{v}^2 = \frac{1}{2} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') (\underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}')^2$$

(Geschwindigkeit an der Stelle \underline{r}' relativ zu K')

Vorgehensweise analog zum diskreten Fall!

$$= \frac{1}{2} \underline{v}_S^2 \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') + \cancel{(\underline{v}_S \times \underline{\omega}) \cdot \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{r}'} + \frac{1}{2} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') (\underline{\omega} \times \underline{r}')^2$$

Null, da Schwerpunkt im Ursprung von K' (s. Beginn des Kapitels)

behandeln wie im diskreten Fall

definiere $J_{\mu\nu} := \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left[(\mathbf{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\mathbf{r}')_{\mu} (\mathbf{r}')_{\nu} \right]$
 bestimmt durch die spezifische Masseverteilung!

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2} \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_{\mu} J_{\mu\nu} \omega_{\nu} \quad \text{genau wie im diskrete Fall}$$

\Rightarrow kinetische Energie T hat allgemein die Zerlegung

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

mit $T_{\text{trans}} = \frac{M}{2} \underline{v}_S^2$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega_{\mu} J_{\mu\nu} \omega_{\nu} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{J} \underline{\omega}$$

wobei: \underline{J} ist eine Matrix mit Komponenten $J_{\mu\nu}$

$$\left(\underline{J} \underline{\omega} \right)_{\mu} = \sum_{\nu=1}^3 J_{\mu\nu} \omega_{\nu}$$

III. 4, Eigenschaften des Trägheitstensors

i) \underline{J} ist ein Tensor 2. Stufe

(Skalar: Tensoren 0. Stufe
 Vektoren: " 1. Stufe)

Was heißt das für das Transformationsverhalten unter Drehung?

Hintergrund:

für die Komponenten eines Tensors 1. Stufe (Vektor) gilt bei Drehungen:

$$\left(\underline{r}' \right)_{\mu} \longrightarrow \left(\underline{r}'' \right)_{\mu} = \sum_{\nu=1}^3 R_{\mu\nu} \left(\underline{r}' \right)_{\nu}$$

($\mu=1,2,3$)

mit $R_{\mu\nu}$: Elemente einer Drehmatrix \underline{R}

$$\text{mit } \underline{R} \in SO(3)$$

"spezielle orthogonale Gruppe in drei reellen Dimensionen"

Eigenschaften:

$$\det \underline{\underline{R}} = 1$$

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T \Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$

Man fordert:

Tensoren K -ter Stufe transformieren sich für jeden Index wie Vektoren!

also: für Tensor 2. Stufe:

$$\underbrace{J_{\mu\nu}}_{\text{Elemente von } \underline{\underline{J}}} \rightarrow \underbrace{J'_{\mu\nu}}_{\text{Elemente von } \underline{\underline{J}'}} = \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\delta=1}^3 R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta}$$

Die Determinante R hat also also zweimal auf!

Beweis dieser Transformationsvorschrift für $\underline{\underline{J}}$ (für diskrete Massenverteilung)

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\underbrace{(\underline{r}_i')^2}_{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{von } \underline{r}_i'}} \cdot d_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_{\mu} (\underline{r}_i')_{\nu} \right) \quad |\underline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(\sum_{\alpha=1}^3 (\underline{r}_i')_{\alpha}^2 \right) d_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_{\mu} (\underline{r}_i')_{\nu} \right)$$

Dieses nun die Vektoren \underline{r}_i'

$$\Rightarrow (\underline{r}_i'')_{\alpha} = \sum_{\delta} R_{\alpha\delta} (\underline{r}_i')_{\delta}$$

betrachte

$$\sum_{\alpha=1}^3 (\underline{r}_i'')_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\delta} \sum_{\gamma} R_{\alpha\delta} R_{\alpha\gamma} (\underline{r}_i')_{\delta} (\underline{r}_i')_{\gamma}$$

$$= \sum_{\delta} \sum_{\gamma} (\underline{r}_i')_{\delta} \underbrace{\sum_{\alpha} R_{\alpha\delta} R_{\alpha\gamma}}_{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{von } \underline{R}^T}} (\underline{r}_i')_{\gamma}$$

$$\underbrace{\sum_{\alpha} (\underline{R}^T)_{\alpha\delta} R_{\alpha\gamma}}_{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{von } \underline{R}^T \underline{R}}}$$

$$\underbrace{(\underline{R}^T \underline{R})_{\delta\gamma}}_{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{von } \underline{R}^T \underline{R}}}$$

$$(\underline{1})_{\delta\gamma} = \delta_{\delta\gamma}$$

$$= \sum_{\delta} \sum_{\gamma} (\underline{r}_i')_{\delta} \delta_{\delta\gamma} (\underline{r}_i')_{\gamma} = \sum_{\delta} (\underline{r}_i')_{\delta}^2 = (\underline{r}_i')^2$$

d.h. das Skalarprodukt ist invariant unter Drehung!

betrachte nun das Kronecker-Delta $\delta_{\mu\nu}$ in $J_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu}^I &= \sum_{\gamma} \sum_{\delta} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} \delta_{\gamma\delta} \\ &= \sum_{\gamma} R_{\mu\gamma} R_{\nu\gamma} = \sum_{\gamma} R_{\mu\gamma} (\underline{R}^T)_{\gamma\nu} \\ &= (\underline{R} \underline{R}^T)_{\mu\nu} = (\underline{1})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^I &= \sum_{\gamma} \sum_{\delta} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta} && \text{siehe Def. von } J_{\mu\nu} \text{ ein} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{\gamma} \sum_{\delta} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} \left((r_{i\gamma}^I)^2 \delta_{\gamma\delta} - (r_{i\gamma}^I)_{\gamma} (r_{i\delta}^I)_{\delta} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left((r_{i\mu}^I)^2 \delta_{\mu\nu} - \underbrace{\sum_{\gamma} R_{\mu\gamma} (r_{i\gamma}^I)_{\gamma}}_{(r_{i\mu}^I)_{\mu}} \underbrace{\sum_{\delta} R_{\nu\delta} (r_{i\delta}^I)_{\delta}}_{(r_{i\nu}^I)_{\nu}} \right) \end{aligned}$$

letzte Zeile entspricht der Def. von \underline{J} in den gedrehten Vektoren! $(r_{i\mu}^I)$

Wir haben also gesehen, dass \underline{J} wirklich ein richtiger Tensor 2. Stufe ist mit dem korrekten Transformationsverhalten unter Drehung!

Weitere Eigenschaften des Trägheitstensors:

(i) Der Trägheitstensor enthält immer 2 Anteile

$$\begin{aligned} (\text{z.B. Kugelschale}) \quad J_{\mu\nu} &= \int dm \, g(r^I) (r^I)^2 \delta_{\mu\nu} && \left. \begin{array}{l} \text{rotationsinvariant} \\ \text{Anteil!} \end{array} \right\} \\ &\quad - \int dm \, g(r^I) (r^I)_{\mu} (r^I)_{\nu} && \left. \begin{array}{l} \text{nicht rotationsinvariant,} \\ \text{hängt also ab von} \\ \text{der Wahl von } K^I \end{array} \right\} \end{aligned}$$

iii) $\underline{\underline{J}}$ ist linear in den m_i bzw. in $g(\underline{r}')$

$\Rightarrow \underline{\underline{J}}$ ist additiv beim Zusammenfügen zweier Körper

(„extensive“ Größe)

iv) $\underline{\underline{J}}$ wird dargestellt durch eine reelle, symmetrische Matrix

(z.B. Kinetisch.) $\underline{\underline{J}} = \int d\underline{v} g(\underline{r}')$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & x'^2 + z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2 + y'^2 \end{pmatrix}$$

$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

v) Folgerung aus iv):

$\underline{\underline{J}}$ ist diagonalisierbar durch orthogonale Transformation: $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\Rightarrow \underline{\underline{J}}$ läßt sich überführen in

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

mit J_1, J_2, J_3 Eigenwert von $\underline{\underline{J}}$

Spalten von $\underline{\underline{R}}$: Eigenvektoren von $\underline{\underline{J}}$