2-Körperproblem mit Zentralkraft

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12} \quad , \quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

Erhaltungsgröße

a) Gesamtimpuls $\underline{P}$ ist erhalten , $\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \frac{\overset{\text{const}}{\underline{P}}}{M} \cdot t \Rightarrow \ddot{\underline{R}} = 0$

↳ Schwerpunkt

~~Mit~~ $M = m_1 + m_2$

Relativbewegung :

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

Dynamik: $\boxed{\mu \ddot{\underline{r}}_{12} = \underline{F}_{12}}$ mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$

Abtrennung der Schwerpunktbewegung!

b) Gesamt Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r}_1 \times m_1 \dot{\underline{r}}_1 + \underline{r}_2 \times m_2 \dot{\underline{r}}_2$

$$= \dots = \underbrace{M \underline{R} \times \dot{\underline{R}}}_{\text{Schwerpunkt-anteil}} + \underbrace{\mu \underline{r}_{12} \times \dot{\underline{r}}_{12}}_{\text{Relativanteil } \underline{L}_{rel}}$$

$$\dot{\underline{L}} = 0 \quad , \quad \ddot{\underline{R}} = 0 \Longrightarrow \dot{\underline{L}}_{rel} = 0 \quad !$$

und $\underline{L}_{rel} \perp \underline{r}_{12}$, $\underline{L}_{rel} \perp \dot{\underline{r}}_{12}$

Die Bewegung verläuft zu allen Zeiten in einer Ebene senkrecht zu $\underline{L}_{rel}$!!

Wähle Polarkoordinaten ($\underline{L}_{rel}$ in z-Richtung und)

(→ Bewegung in der x-y-Ebene)

$$\underline{r}_{12}(t) = (\underbrace{r(t)\cos\varphi(t)}_{x(t)}, \underbrace{r(t)\sin\varphi(t)}_{y(t)}, 0)$$

$$\dot{\underline{r}}_{12}(t) = \dots\dots$$

Drücke $\underline{L}_{rel}$ durch Polarkoordinaten aus

$$\underline{L}_{rel} = (0, 0, L_{rel})$$

$$L_{rel} \overset{\mu}{=} (\underline{r}_{12}(t) \times \dot{\underline{r}}_{12}(t))_z = (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\mu$$

$$= \mu (r\cos\varphi \, \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi \, r\cos\varphi \, \dot{\varphi}$$
$$- \dot{r}\cos\varphi \, r\sin\varphi + r\sin\varphi \, \dot{\varphi} \, r\sin\varphi)$$

$$= \mu r^2 \dot{\varphi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \mu r \dot{r} \underbrace{(\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)}_{0}$$

$$= \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \left(\hat{=} \mu (r(t))^2 \dot{\varphi}(t) \right)$$

$$= \text{const} \; !$$

Dies ergibt bei festem L_{rel} eine Bestimmungsgleichung für $r(t)$ und $\varphi(t)$

Eine zweite Gleichung ergibt sich durch die Betrachtung der Energie!

Gesamtenergie

$$E = T + V \quad , \quad \dot{E} = 0 \quad \text{(konservative Kraft)}$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \underbrace{V(r_{12})}_{\text{Potential für Zentralkraft}}$$

$r_{12} = r = |\underline{r}_{12}|$

$$= \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Einsetzen von Schwerpunkt- und Relativkoordinaten}} = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2}_{E_S} + \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}_{12}^2 + V(r_{12})$$

Abtrennung der Schwerpunktbewegung!

$$E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}_{12}^2 + V(r_{12})$$

benutze $\dot{E} = 0$

und $\dot{E}_S = \frac{M}{2} 2 \dot{\underline{R}} \cdot \underbrace{\ddot{\underline{R}}}_{0} = 0$! $\Longrightarrow$ $\boxed{\dot{E}_{rel} = 0}$

Erhaltung des Relativanteils der Energie

Umschreiben in Polarkoordinaten:

$$E_{rel} = \frac{\mu}{2}\left((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\right) + \underbrace{V(r_{12})}_{V(r)}$$

$$= \ldots = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

Verwende $L_{rel} = (\underline{L}_{rel})_z = \mu r^2 \dot{\varphi}$

$$\Longrightarrow \boxed{E_{rel} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2} + V(r)} \qquad \text{Konstante!}$$

<u>Interpretation</u>:

- $\frac{\mu}{2}\dot{r}^2$ kinetische Energie der Radialbewegung

• $\underbrace{\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}} + \underset{\text{aus der Zentralkraft}}{V(r)} = V_{eff}(r)$ „effektives Potential"

(wird typischerweise bei der Behandlung von 2-Körperproblemen eingeführt, z.B. auch in der Atomphysik!)

„Drehimpulsbarriere" oder „Zentrifugalbarriere"

$$\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \quad , \quad \dot{\varphi} = \omega \quad \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

ist verbunden mit der sogenannten Zentrifugalkraft, die auf einen rotierenden Körper wirkt und diesen "nach außen" treibt

Zentrifugalkraft ist ebenfalls proportional zu $\omega^2 = \dot{\varphi}^2$!!

c) Lösung des Einteilchenproblems

(noch unabhängig von der genauen Form des Zentralkraftpotentials $V(r)$)

Aus der Erhaltung der (Relativ-)energie und des (Relativ-)Drehimpulses folgen zwei Bestimmungsgleichungen, genauer: Differentialgleichungen für die Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$

$$\left.\begin{array}{ll} ① & L_{rel} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \\ ② & E_{rel} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const} \end{array}\right\} \text{„Integrale der Bewegung"}$$

Folgerungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{aus ①} & \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{rel}}{\mu r^2} \\ \text{aus ②} & \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r)\right)} \end{array}\right\} \text{gilt bei festem } L_{rel}\text{, } E_{rel}$$

Bemerkungen:

- Das sind zwei Differentialgl. (DGLs) erster Ordnung in t (Unterschied zu den Newton'schen BWGL!)

• Aus ② sieht man: Es muß gelten (für physikalisch sinnvolle Lösungen)

$$\boxed{E_{rel} \geq V_{eff}(r)} \iff \text{Term unter der Wurzel positiv}$$

$\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)\right)$

$\iff$ kinetische Energie $\frac{\mu}{2}\dot{r}^2$ positiv!

„klassisch erlaubter Bereich"

(Das ist anders in der Quantenmechanik (Tunneleffekt))

Behandle nun die DGLs ① und ②
durch die Methode „Trennung der Variablen", dann:

② $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r)\right)}$ rechte Seite hängt nicht explizit von t ab!!

hat die allg. Form: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$ $y = r,\ x = t$ (hier mit $f(x) = 1$)

$$\iff \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy}{g(y)} \implies \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{f(x')} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r')\right)}}$$

$$\boxed{t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{rel} - V_{eff}(r')\right)}}}$$

Durch Auswerten des Integrals für gegebenes $V(r)$ und damit $V_{eff}(r)$ folgt $t(r)$ bei festem E_{rel}, L_{rel}, μ und r_0 (Anfangsbedingung)

Daraus durch Umkehrung $r(t)$

Außerdem:

① $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_{rel}}{\mu r^2}$ $\implies \varphi(t) - \varphi(t_0) = L_{rel} \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\mu\left(r(t')\right)^2}$

integriere auf beiden Seiten von t_0 bis t

lösbar bei bekanntem $r(t)$ ✓!

Bemerkungen

- Mit Berechnung von $r(t)$ und $\varphi(t)$ ist das Problem gelöst, da man dann die vollständige Bahnkurve $\underline{r}_{12}(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t), 0)$ vorliegen hat!

- Manchmal betrachtet man auch direkt eine Kombination der beiden DGL's für $r(t)$ und $\varphi(t)$ (Gl. ① und ②)

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} \overset{①,②}{=} \frac{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} - V_{eff}(r))}}{L_{rel}} \mu r^2$$

gilt für jede Zeit t!

Auflösen ~~xx~~ nach $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{L_{rel}}{\underbrace{\sqrt{2\mu(E_{rel} - V_{eff}(r))} \cdot r^2}_{\text{unabhängig von } \varphi\,!}} dr$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L_{rel}\, dr'}{\sqrt{2\mu(E_{rel} - V_{eff}(r'))}\, r'^2}$$

Lösen und umkehren $\Rightarrow r(\varphi)$ „Bahngleichung"

d) Anwendung: Das Kepler-Problem

hier: $\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}}$ Gravitationskraft

Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{(\underline{r}_{12})^2}$

zugehöriges Potential:

$$\underline{F}_{12} = -\nabla_{12} V(r_{12}) = -\nabla_1 V(r_{12})$$

$$\Rightarrow V(r_{12}) = V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = -\gamma \frac{\mu M}{r}$$

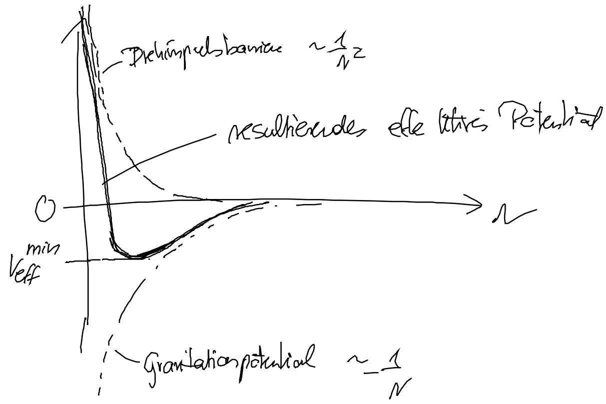
$r = r_{12} = |\vec{r}_{12}|$

$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad M = m_1 + m_2}$

Gravitationspotential anziehend !! $(\gamma > 0)$

Effektives Potential

$$V_{eff}(r) = \underbrace{-\gamma \frac{\mu M}{r}}_{\text{anziehend!}} + \underbrace{\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}}_{\text{abstossend!}}$$



: hat abstossende (repulsive) und anziehende Anteile!

$\Rightarrow$ ~~Existenz~~ eines Minimums

Bemerkungen:

- $\lim_{r \to 0} V_{eff}(r) = \infty$ da hier die Drehimpulsbarriere $\frac{L_{rel}^2}{2\mu r^2}$ dominiert !!

  ($\frac{1}{r^2}$ wächst schneller mit $r \to 0$ als $1/r$!!)

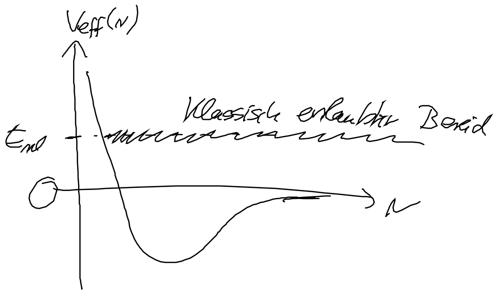
- $\lim_{r \to \infty} V_{eff}(r) \sim -\frac{1}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

  hier dominiert die Gravitation

Annahme (plausibel) $L_{rel} > 0$

Fallunterscheidung: • $E_{rel} > 0$

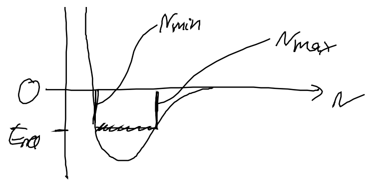
$\boxed{\text{Erinnerung: es muss immer gelten } E_{rel} \geq V_{eff} \rightarrow \text{Einschränkung für die Werte von } r \text{ !!}}$



Teilchen können ins Unendliche gelangen!
„Streuzustände"

V_{eff} ↑

• $E_{rel} < 0$



hier gibt es also zwei Umkehrpunkte r_{min} und r_{max}

„gebundene" Bewegung

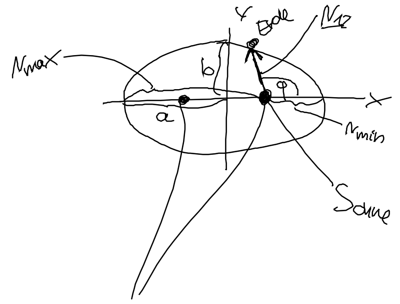
Eine genauere Diskussion der Bewegungsgleichungen (Lösung der Differentialgleichung) ergibt:

i) $E_{rel} < 0$, gebundene Bewegung

⇒ Bahn $r(\varphi)$ ist Ellipse, in deren einem Brennpunkt ~~die~~ der Bahnebene schwerere Körper (Sonne!) steht

(d.h. $r(\varphi)$ hat die Form $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ mit $p = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$

Exzentrizität ($\varepsilon < 1$)



Brennpunkte bei $(\pm e, 0)$

a: große Halbachse $a = -\frac{\gamma m M}{2E_{rel}}$

b: kleine Halbachse. $b = \frac{L_{rel}}{\sqrt{-2mE_{rel}}}$

und $e^2 = a^2 - b^2$

Dieses Ergebnis (Bewegung auf einer Ellipse) entspricht genau dem 1. Kepler'schen Gesetz der Planetenbewegung!!