Wh: Zeittranslationssymmetrie

holonom-skleronome Zwangsbedingungen, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (Potential nicht explizit zeitabhängig)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k}\Big) = 0 \qquad \text{Gesamtenergie erhalten!}$$

Interpretation $\quad L - 2T = -(T+V) = -E$

Die Funktion $H := \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$ Hamiltonfunktion

$$= \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L \quad \text{mit } p_k \hat{=} \text{ generalisierter Impuls}$$

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

II.11.2. Räumliche Translationssymmetrie

$\Rightarrow$ Physikalische Eigenschaften ändern sich nicht bei einer kollektiven Verschiebung der Koordinaten in eine Raumrichtung, z.B. entlang der x-Achse

betrachte System ohne Zwangsbedingungen

$$q_k \to (\underline{r}_i)_{x,y,z} \qquad i = 1, \dots, N$$

infinitesimale, kontinuierliche Transformation

$$(\underline{r}_i)_x = x_i \longrightarrow x_i' = x_i + \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{(kollektive Verschiebung!)}$$

$$\delta x_i = x_i' - x_i = \varepsilon \quad \forall i \qquad \varepsilon \text{ klein!}$$

Räuml. Translationssymmetrie bedeutet für die Lagrange-Funktion, dass

$$\delta L = L\Big|_{\{x_i'\}} - L\Big|_{\{x_i\}} = 0$$

Änderung von L durch Verschiebung

Lagrange-Fkt. mit verschobenen x-Koordinaten

Wir nutzen aus, dass ε klein ist

$$\Rightarrow \delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i$$

Beschränkung auf kleine ε: lineare Form in δx_i

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i} \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\overset{\varepsilon \text{ endlich}}{\Longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad !$$

Interpretation?

$\dot{x}_i$: x-Komponente der Geschw. von Teilchen i

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \overset{\text{Lagrange-Glchg.}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \left(\underline{p}_i\right)_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underline{P}\right)_x \qquad \text{mit } \underline{P} = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i$$

$$\overset{!}{=} 0$$

Also:

Translationssymmetrie in x-Richtung $\Longleftrightarrow$ Erhaltung des Gesamtimpulses in x-Richtung!

gilt natürlich analog auch für die anderen Raumrichtungen!

Bemerkungen

- Aus $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \overset{L=T-V}{=} \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\underline{F}_i\right)_x = \left(\underline{F}\right)_x$

Kraft auf Teilchen i

Also: Translationssymmetrie $\Longleftrightarrow$ Impulserhaltung

$\Longleftrightarrow$ Verschwinden der Gesamtkraft in die entsprechende Raumrichtung!

(Konsistent mit unserer Erwartung aus der Newton-Mechanik!)

allgemein:

- Eine Koordinate q_k, für die $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$, heißt zyklische Koordinate

Der zugehörige generalisierte Impuls $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ ist Erhaltungsgröße, d.h. $\dot{p}_k = 0$

Beispiele

i) ein Teilchen in einem Potential $V(\underline{r}) = V(y, z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$, d.h. x ist also zyklische Koordinate

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = P_x = \text{const}$$ Erhaltungsgröße!

ii) Zwei Teilchen mit Zentralpotential

$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(\underbrace{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}_{r}) = V(r)$$ (führt auf Zentralkraft $\underline{F}_{12} = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)\hat{\underline{r}}$ mit $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$)

Translationsinvarianz entlang der x, y, z-Richtung!

$$\Rightarrow P_x = \text{const},\ P_y = \text{const},\ P_z = \text{const}$$

$$\text{mit } \underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{const}$$

Das ist genau der sog. Schwerpunktsatz: $M\dot{\underline{R}} = \underline{P} = \text{const}$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\underline{R} = \frac{1}{M}(m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2)$$

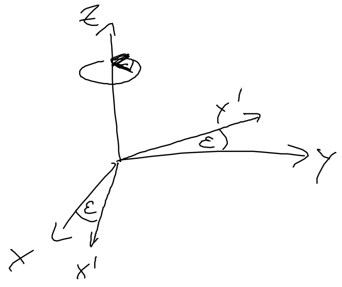
II.11.3. Isotropie des Raumes (Rotationssymmetrie)

$\hat{=}$ physikalische Eigenschaften ändern sich nicht bei einer Drehung des Gesamtsystems

Betrachte wieder konservatives System ohne Zwangsbed.

Drehung: $\underline{r}_i \longrightarrow \underline{r}_i' = \underset{=}{R} \cdot \underline{r}_i$ — Drehmatrix

z.B. Drehung um die z-Achse mit Winkel $\varphi = \varepsilon$



$$\Rightarrow x_i' = x_i \cos\varepsilon + y_i \sin\varepsilon$$
$$y_i' = -x_i \sin\varepsilon + y_i \cos\varepsilon$$
$$z_i' = z$$

$$\underset{=}{R} = \underset{=}{R}_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon & 0 \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ε klein; $\cos\varepsilon \approx 1$, $\sin\varepsilon = \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_i' = x_i + y_i\varepsilon \\ y_i' = -x_i\varepsilon + y_i \\ z' = z_i \end{array}\right\} \quad \underline{r}_i' = \underline{r}_i + \delta\underline{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} y_i\varepsilon \\ -x_i\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}^{\delta\underline{r}_i}$$

man kann $\delta\underline{r}_i$ auch so ausdrücken:

$$\delta\underline{r}_i = \underline{r}_i \times \varepsilon\underline{\hat{e}}_z$$ Einheitsvektor in z-Richtung

hängt von $\underline{r}_i$ ab !!

Drehung betrifft auch die Geschwindigkeiten !

$$\underline{v}_i \longrightarrow \underline{v}_i' = \underline{v}_i + \underbrace{\delta\dot{\underline{r}}_i}_{\delta\underline{v}_i} = \underline{v}_i + (\underbrace{\underline{v}_i \times \varepsilon\hat{e}_z}_{\delta\dot{\underline{r}}_i})$$

$\dot{\underline{r}}_i$

Folgerungen für die Lagrangefunktion:

Rotationssymmetrie

$$\Leftrightarrow \delta L = L\big|_{\{\underline{r}_i', \underline{v}_i'\}} - L\big|_{\{\underline{r}_i, \underline{v}_i\}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_i} \cdot \delta \underline{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}_i} \cdot \delta \underline{v}_i \right) = 0$$

ε klein

benutze: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}_i} = \frac{\partial T}{\partial \underline{v}_i} = \underline{p}_i$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_i} \overset{\text{BWGL}}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{v}_i} = \dot{\underline{p}}_i$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\underline{p}}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \underline{p}_i \cdot \delta \underline{v}_i \right) \overset{!}{=} 0$$

benutze $\delta \underline{r}_i = \underline{r}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z$, $\delta \underline{v}_i = \underline{v}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\underline{p}}_i \cdot (\underline{r}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z) + \underline{p}_i \cdot (\underline{v}_i \times \varepsilon \hat{\underline{e}}_z) \right)$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

$$= \sum_i \varepsilon \hat{\underline{e}}_z \left[(\dot{\underline{p}}_i \times \underline{r}_i) + (\underline{p}_i \times \underline{v}_i) \right]$$

$$= \varepsilon \hat{\underline{e}}_z \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\underline{p}_i \times \underline{r}_i) \overset{!}{=} 0$$

Gleichung soll für endliche ε gelten!

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\underline{p}_i \times \underline{r}_i)_z = 0$$

mit $\underline{L}_i = \underline{r}_i \times \underline{p}_i$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\underline{L}_i)_z = \frac{d}{dt} (\underline{L})_z = 0$$

Also:

Drehinvarianz um z-Achse

$\Leftrightarrow$ Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses!

(analog für die anderen Raumrichtungen)

Allgemeiner Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltung

Die Lagrangefunktion L eines Systems sei invariant unter der kontinuierlichen Transformation $q \longrightarrow h^s(q)$

mit s: kontinuierlicher Parameter und $h^s(q)\big|_{s=0} = q$

Dann gibt es ein Integral der Bewegung (Erhaltungsgröße)

$$\boxed{I = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} h^s(q_k)\Big|_{s=0} \quad , \quad \frac{d}{dt} I = 0}$$

Noether'sches Theorem

Beispiel

- Translation in x-Richtung:

$$h^s(\underline{r}_i) = \underline{r}_i + s\,\hat{\underline{e}}_x \Rightarrow \frac{d}{ds} h^s\Big|_{s=0} = \hat{\underline{e}}_x$$

$$\Rightarrow I = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \hat{\underline{e}}_x = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \hat{\underline{e}}_x = \left(\underline{P}\right)_x$$

- Rotation um die z-Achse:

$$h^s(\underline{r}_i) = \begin{pmatrix} x_i + y_i s \\ y_i - x_i s \\ z_i \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{ds} h^s(\underline{r}_i)\Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_i \times \hat{\underline{e}}_z$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i}}_{p_i} \cdot (\underline{r}_i \times \underline{e}_z) = \ldots = (\underline{L})_z$$

Zum Abschluss der Diskussion des Lagrange-Formalismus

Lagrange-Formalismus für Felder

bisher: Lagrange-Funktion $L(\{q_k\},\{\dot q_k\},t)$ $k=1,\dots,f$

Klass. Punktmechanik

Bewegungsgl. aus $\delta S \stackrel{!}{=} 0$ mit $\underbrace{S}_{\text{Wirkung}}=\int_{t_0}^{t} dt\, L(\{q_k\},\{\dot q_k\},t)$

eindimensionales Integral über die Zeit

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}=0$$

jetzt: Verallgemeinerung auf Feldgrößen

$\varphi_k(\underline{r},t)$ z.B. elektrostatisches Potential, Komponenten des Vektorpotentials, Gravitationspotential, Schrödinger'sches Materiewellenfeld, ...

$k=1,\dots,f$

Frage: Herleitung der Grundgleichungen für Felder?

Führe dazu ein:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\{\varphi_k\},\{\varphi_{k,\mu}\},x^\mu)$$

"Lagrangedichte" Felder Ableitungen der Felder Feldvariablen

Hier haben wir eingeführt:

(eigentlich stünde hier noch die Lichtgeschwindigkeit, hier $c=1$)

$$\mu=0,1,2,3\quad,\quad x^\mu=(\underbrace{t}_{x^0},\underbrace{x_1,x_2,x_3}_{\text{räuml. Komponente}})$$

Zeit

„Vierernotation"

$x_1,x_2,x_3=x,y,z$

und $\varphi_{k,\mu}=\varphi_{k,\mu}(\underline{r},t)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_k(\underline{r},t)$

speziell: $\varphi_{k,0}=\frac{\partial}{\partial x^0}\varphi_k(\underline{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_k(\underline{r},t)$
$=\dot\varphi_k$

$\varphi_{k,1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_k(\underline{r},t)$ räuml. Ableitung

Es gilt analog zur klass. Punktmechanik ein Variationsprinzip für die verallgemeinerte Wirkung

$$S = \int dx^0 \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \; \mathcal{L}$$
$$= \int dt \int d\underline{r} \; \mathcal{L}\left(\{\psi_k\}, \{\psi_{k,\mu}\}, x^\mu\right)$$

Vierdimensionales Integral!

Variationsprinzip: $\delta S \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{k,\mu}} = 0} \qquad \forall k = 1, \dots, f$$

Gleichungen für Felder!

im 2. Term haben wir die Einstein'sche Summenkonvention benutzt.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{k,\mu}} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{k,\mu}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k}}_{\text{zeitliche Ableitung}} + \underbrace{\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x^\mu}\right)}}_{\text{räumliche Ableitung}}$$

Die Lagrange-Gl. kann man nun benutzen, um Grundgesetze herzuleiten, z.B. Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, Schrödingergleichung

Beispiel:

Gauss'sches Gesetz der Elektrostatik

$$\nabla \cdot \underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{\text{elektr. Feld}} = \frac{\overbrace{\rho(\underline{r})}^{\text{Ladungsdichte}}}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \Phi(\underline{r})$$

Ansatz für die Lagrangedichte: $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\phi(\underline{r})\right)^2}_{\text{Energiedichte des Feldes } \underline{E}} - \underbrace{\rho(\underline{r})\phi(\underline{r})}_{\text{potentielle Energie einer Ladung im Potential}}$

Beachte:
- rein statisches Problem, keine Zeitableitungen!
- $k=1$:

$$\psi_k(\underline{r},t) \to \phi(\underline{r})$$

$\Rightarrow$ die Lagrange-Gl. reduziert sich auf:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\rho(\underline{r}) - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\beta}\,\delta_{\alpha\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\rho(\underline{r}) - \varepsilon_0\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}}_{-E_\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$