Wh:

d'Alembertsches Prinzip

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{virtuelle Arbeit}} = 0$$

virtuelle Verrückungen

Lagrange-Gl. 1. Art:

Zwangskräfte

$$\boxed{\begin{aligned} m_i \ddot{\underline{r}}_i &= \underline{F}_i + \underline{Z}_i \\ &= \underline{F}_i + \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \underline{a}_{i,\lambda} \end{aligned}}$$

kommt aus den Zwangsbedingungen (gegeben!)

holonome und nicht-holonome Zwangsbed. der Form

$$\boxed{\sum_i \underline{a}_{i,\lambda} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda dt = 0}$$

$3N + p$ Gleichungen für die $\underline{r}_i(t)$ und die Koeffizienten μ_λ

N Teilchen in drei Dimension

Speziell holonome Zwangsbedingungen:

$f = 3N - p$ Zahl der Freiheitsgrade

Einführung generalisierter Koordinaten $\{q_k\}$, mit $k = 1, \ldots, f$

Transformationsgleichungen: $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t) = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$

problemangepasst!! Zwangsbed. werden bereits berücksichtigt!!

Herleitung der Lagrange-Gl. zweiter Art (Kapitel II. 6)

Ausgangspunkt

$$(*) \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \qquad \text{d'Alembert}$$

2. Term:

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}_{\delta \underline{r}_i} = \sum_{k=1}^{f} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}}_{Q_k} \Big) \delta q_k$$

generalisierte Kräfte

$$= \sum_{k=1}^{f} Q_k \, \delta q_k$$

Aus (*)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i - \sum_{k=1}^{f} Q_k \, \delta q_k = 0} \quad (**)$$

1. Term in (**)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

benutze

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) \overset{\text{Produktregel}}{=} \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} + \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l\right) + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)}_{\text{Geschwindigkeit } \underline{v}_i\ !!}$$

Kettenregel (totale Zeitableitung)

denn:

$$\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt}\underline{r}_i(q_1,\dots,q_f,t)$$

$$= \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) = \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} + \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}$$

Einsetzen in den ersten Term von (**)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k}_{\delta \underline{r}_i} = \sum_{k=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

benutze nun noch (für das Umschreiben des ersten Terms)

$$\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad \text{denn:} \quad \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\overbrace{\left(\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)}^{\underline{v}_i}$$

$$= \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_k}}_{\delta_{kl}} + 0 = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \quad \text{q.e.d.}$$

Es ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{f}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{①} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}}_{②}\right)\delta q_k$$

benutze schließlich den Ausdruck für die kinetische Energie

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\underline{p}_i^2}{2m_i}$$

daher:

in ①
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T$$

$$\Rightarrow ① \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad !$$

analog:

$$② \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Man findet also

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}_{\delta \underline{r}_i} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad ③$$

Kombiniere nun alles (③ mit dem Ausdruck: $\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k \, \delta q_k$)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

Ergebnis aus dem Umschreiben des d'Alembertschen Prinzips

Beachte nun:

Die $\{q_k\}$ berücksichtigt bereits implizit die Zwangsbedingungen, sie können unabhängig voneinander variiert werden !!

Daher gilt obige Gleichung für jeden einzelnen Summanden (und nicht nur für die Summe, wie beim d'Alembertschen Prinzip in seiner Originalform (mit $\delta \underline{r}_i$))

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k} \qquad k = 1, \dots, f$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

q_k: generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_k$: " Geschwindigkeiten
Q_k: generalisierte Kräfte $\left(Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \right)$

Bemerkungen:

1) Die Lagrange-Gl. zweiter Art sind etwas weniger allgemein als die Lagrange-Gl. erster Art, da Einschränkung auf holonome Zwangsbedingungen!

Sonst gibt es keine generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$!

2) Betrachte speziell konservative Systeme

Kräfte darstellbar als Ableitung eines Potentials nach den Koordinaten

Auch die generalisierte Kraft

$\Rightarrow Q_k$ läßt sich schreiben als $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ mit V dargestellt in generalisierten Koordinaten!

$\left(\text{und } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \right)$

aus Einsetzen in Lagrange-Gl. zweiter Art

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Definiere nun die sogenannte Lagrange-Funktion

$$L = T - V \qquad \text{mit} \quad L = (q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)$$

$$= (\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

T: kinet. Energie (hängt ab von $\{\dot{q}_k\}$)

V: potentielle Energie (hängt ab von $\{q_k\}$)

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art lassen sich schreiben als

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \qquad \forall\, k = 1, \ldots, f$$

Lagrange-Gl. zweiter Art für Systeme mit einem Potential V

3) Lagrange-Gl. zweiter Art liefern System von $f = 3N - p$ (p: Zahl der Zwangsbedingungen) Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit

$\Rightarrow$ Eindeutig lösbar mit $2f$ Anfangsbedingungen für $q_k(t=0)$ und $\dot{q}_k(t=0)$

4) Die Definition der Lagrange-Funktion $L = T - V$ für Systeme mit Potential V ist nicht eindeutig!!
(da die Lagrange-Gl. nur Ableitungen enthalten)

Bestimmte „Eichtransformationen" von L führen zu denselben Lagrangegleichungen

5) Allgemeine Form der kinetischen Energie
ausgedrückt durch die generalisierten Koordinaten / Geschwindigkeiten

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2$$

(benutze $\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$)

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

Ausmultiplizieren

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

Man sieht:

– falls $\underline{r}_i$ explizit von der Zeit abhängt, also $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \neq 0$
dann hängt T nicht nur von den generalisierten Geschw. ab !!

– falls $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$, dann reduziert sich T auf die Form

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_l}\right)}_{\text{Matrix der verallgemeinerten Masse}}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

II.7. Anwendungsschema der Lagrange-Gl. zweiter Art

(i) Wahl der $f = 3N - p$ generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$,
die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind (und unabhängig variiert werden können!)

$\Rightarrow$ Aufstellung der Transformationsgleichungen

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$$

ii) Berechne die Geschwindigkeiten, Aufstellen der kinetische Energie T

$$\underline{v}_i = \frac{d}{dt}\underline{r}_i \;, \quad \underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_k\}, t) \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_i = \underline{v}_i(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

$$\Rightarrow T$$

iii) • Nicht-Konservative Kräfte:

Bestimmung der generalisierten Kräfte

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

• Konservative Kräfte:

Bestimmung des Potentials $V(\{q_k\}, t)$

iv) Aufstellung der Lagrange-Gl. zweiter Art:

• $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$ nicht-Konservativ

• $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$ mit $L = T - V$ Konservativ

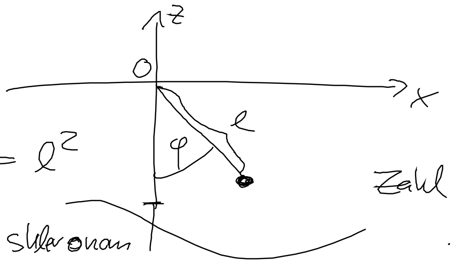
und $L = L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$

<u>Beispiel:</u>

Fadenpendel mit fester Länge l (in zwei Dimensionen)

Zwangsbedingung

$$(x(t))^2 + (z(t))^2 = l^2$$



holonom - skleronom

Zahl der Freiheitsgrade

$$f = \underbrace{2}_{2\text{ Dimensionen}} \cdot \underbrace{1}_{1\text{ Teilchen}} - \underbrace{1}_{1\text{ Zwangsbed.}} = 1$$

i) ~~Ge~~ Generalisierte Koordinate $\varphi(t)$

Transformationsgleichungen:

$$x(t) = l \sin \varphi(t) \quad , \quad y(t) = 0$$

$$z(t) = -l \cos \varphi(t)$$

(ii) Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = (\dot{x}(t), 0, \dot{z}(t))$

$$= (l \cos\varphi \, \dot{\varphi}, 0, l \sin\varphi \, \dot{\varphi})$$

$\Rightarrow$ Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} \underline{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\overbrace{l^2 \cos^2\varphi \, \dot{\varphi}^2}^{\dot{x}^2} + \overbrace{l^2 \sin^2\varphi \, \dot{\varphi}^2}^{\dot{z}^2})$$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 \qquad (\text{denn } \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1)$$