Lagrange-Glg und Hamilton'sches Prinzip

Betrachte ein System mit holonomen ZB und konservativen Kräften

$$\Longrightarrow \text{Lagrange-Fkt } \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1 \ldots q_f, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f, t) = T - V$$

Definieren nun das sogenannte Wirkungsintegral

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt \, \mathcal{L}(q_1 \ldots q_f, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f, t)$$

Die physikalische Bahnkurve (dh. die Lösung der BWGL) zeichnen sich dadurch aus, dass

Hamilton'sches Prinzip: $\boxed{\delta S = 0}$

Die notwendige Bdg hierfür ist, dass die Bahnkurve die Lagrange-Glg 2. Art erfüllt

Beweis

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \mathcal{L}(q_1 + \delta q_1, \ldots q_f + \delta q_f, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1 \ldots, t) - \mathcal{L}(q_1, \ldots q_f, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f, t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k} \right)$$

Nebenrechnung:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \overset{\text{part. Integration}}{=} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}}$$

$= 0$ weil δq_k an den Rändern verschwindet

$$\Rightarrow \quad \delta S = \int dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \overset{!}{=} 0$$

Generalisierte Koordinaten können getrennt (holon. ZB)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Bemerkungen:

- Unterschied d'Alembert -> Hamilton'sches Prinzip ist ein Integralprinzip. Man vergleicht die tatsächliche Bahn mit differentiell benachbarten Bahnen und integriert!

- Erweiterung auf nicht-konservative Systeme (mit holonomen ZB)

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} (T - W)\, dt$$

modifiziertes Wirkungsintegral mit $W = -\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i$

tatsächliche Bahn aus $\delta \tilde{S} = 0$

Variation Schritt auf

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

Nebenrechnung zum erweiterten Hamilton'schen Prinzip

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, (T - W)$$

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \delta W \right)$$

So gilt wieder

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{d}{dt}\delta q_k = -\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k + \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

$$-\delta W = -\sum_{i=1}^N \underline{F}_i\cdot\delta\underline{r}_i = -\sum_{i=1}^N \underline{F}_i\cdot\sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad \text{, da } \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1\dots q_f, t)$$

$$= -\sum_{k=1}^f\left(\sum_{i=1}^N \underline{F}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = -\sum_{k=1}^f Q_k\,\delta q_k$$

generalisierte Kraft

$$\delta\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f\left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_k} + Q_k\right)\delta q_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = +Q_k$$

II.11 Eichtransformationen und Forminvarianz der Lagrangegleichung

Im Folgenden zeigen wir, dass die Lagrange-Fkt $\mathcal{L}$ und die generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$ durch die Lagrange-Glg nicht eindeutig festgelegt ist.

$\Rightarrow$ bestimmte Transformationen führen zu den gleichen BWGL $\rightarrow$ damit zu gleicher Physik!

a) Eichtransformationen

Bh: Die Transformation $\mathcal{L}\to\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}M(q_1\dots q_f, t)$ mit einer beliebigen* „Eichfunktion" M lässt die Lagrange-Glg invariant.

$\boxed{\text{* aber nicht geschwindigkeitsabhängig}}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot q_k}\left(\sum_{l=1}^f\frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^f\frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}\right)$$

beachte:

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\sum_{l=1}^f\frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \sum_{l=1}^f\frac{\partial M}{\partial q_l}\delta_{l,k} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\dot q}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)}_{=0} = \frac{\partial M}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot q_k} - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial q_k}}_{} - \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d}{dt}M$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial M}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial}{\partial q_l} M + \frac{\partial}{\partial t} M\right)}_{\frac{dM}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Wichtige Anwendung:

<u>Teilchen im elektromagnetischen Feld</u> (gleichzeitig ein wichtiges Bsp für nicht-konservative Kräfte)

betrachte ein Teilchen mit Masse m, Ladung e, in Anwesenheit eines elektrischen Felds $\underline{E}(\underline{r},t)$ und eines magnetischen Felds $\underline{B}(\underline{r},t)$.

Annahme: keine Zwangsbedingung $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z) = \underline{r}$

$\Rightarrow$ Newton'sche Bewegungsgleichung $m\ddot{\underline{q}} = \underline{F}^{\text{Lorentz}} = e\underline{E} + \frac{e}{c}(\dot q \times \underline{B})$ (*)

(cgs-System)

Frage: Was ist die dazugehörige Lagrange-Fkt L, sodass

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{auf (*) führt}$$

zunächst: „konservativer Grenzfall"

$\underline{B} = 0$. Da $\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ (Maxwell'sches Induktionsgesetz)

folgt $\nabla \times \underline{E} = 0$ und damit $\underline{E} = -\nabla\phi(\underline{q},t)$

$\Rightarrow \underline{F} = e\underline{E} = -e\nabla\phi \Rightarrow V(q,t) = \underbrace{e\phi}$

Energie eines geladenen Teilchens im Potential ϕ

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}\dot q^2 - e\phi(q,t)$$

$$LG: \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_k} L - \frac{\partial}{\partial q_k} L = m\ddot q_k + e\frac{\partial}{\partial q_k}\phi = m\ddot q_k + e(\nabla\phi)_k = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot q_k = e(-\nabla\phi)_k = e\underline{E}_k$$