$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}}$$

Euler'sche Gleichungen im (Körperfesten) Hauptachsensystem

$\Rightarrow$ Bewegungsgl. des starren Körpers!

Nehme nun an, dass die äußeren Kräfte verschwinden

$\Rightarrow N_i = 0 \quad \forall\, i = 1,2,3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= 0 \qquad (1) \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= 0 \qquad (2) \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= 0 \end{aligned}}$$

Allgemeine Folgerungen aus (1) – (3) für den kräftefreien Fall

i) $(1) \cdot \omega_1 + (2)\, \omega_2 + (3) \cdot \omega_3$

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Big[\underbrace{(J_2 - J_3) + (J_3 - J_1) + (J_1 - J_2)}_{= 0} \Big] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i^2 \right)$$

$$= \boxed{\frac{d}{dt} T^{rot} = 0}$$

Zeitableitung im Körperfesten System

$\Rightarrow$ Energieerhaltungssatz im Körperfesten System

(alternativ

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} T^{trans} + \frac{d}{dt} T^{rot} = 0$$ im kräftefreien Fall

und der gleichförmigen Schwerpunktsbewegung $T^{trans} = 0$)

ii) Mache nun ① $J_1 \omega_1$ + ② $J_2 \omega_2$ + ③ $J_3 \omega_3$

$$\Rightarrow J_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3$$

$$- \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{\left(J_1 (J_2 - J_3) + J_2 (J_3 - J_1) + J_3 (J_1 - J_2) \right)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \omega_i^2 \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |\underline{L}_{rel}|^2 = 0}$$

denn $\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}$

$$= \sum_i J_i \omega_i \underline{e}_i$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel}^2 = \sum_{ik} J_i \omega_i J_k \omega_k \underbrace{\underline{e}_i \underline{e}_k}_{\delta_{ik}}$$

$$= \sum_i J_i^2 \omega_i^2$$

Zeitableitung im körperfesten System

$\Rightarrow$ Betrag $\underline{L}_{rel}$ ist konstant!

Beachte: Dies ist nicht offensichtlich, denn die volle Bewegung

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} = \underline{N}^{extern}_{rel} = 0}$$

d.h. Betrag und die Richtung ist konstant.

$\Rightarrow$ gilt im raumfesten System!

Frage: Ist die Richtung von $\underline{L}_{rel}$ auch im körperfesten System fest?

$$\underline{L}_{rel} = \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i \underline{e}_i \Rightarrow$$ Richtung nur dann konstant wenn $J_i \dot{\omega}_i = 0 \quad \forall i$

①②③ $\Rightarrow \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = 0$

$$= \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2)$$

Für einen Kreisel mit $J_1 \neq J_2 \neq J_3$
müssen zwei Komponenten von $\underline{\omega}$ verschwinden,
d.h. $\underline{\omega}$ muss parallel einer Hauptträgheitsachse sein!

⇒ die Richtung von $\underline{L}_{rel}$ im körperfesten System ist nur dann konstant, falls $\underline{\omega} \parallel \vec{J}_i$ (i = 1, 2, oder 3)

Drehachse parallel Hauptträgheitsachse

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} \parallel \underline{\omega} \parallel \vec{J}_i$$

Da $\underline{L}_{rel}$ konstant im raumfesten System ist, folgt dann dort auch die Richtung von $\underline{\omega}$ konstant!

Spezialfall:

Kugelkreisel

d.h. $J_1 = J_2 = J_3 = J$ und $\underline{J}$ diagonal

$$\underline{L}_{rel} = J\,\underline{\omega}$$

Eulersche Gleichungen $\Rightarrow J\dot{\omega}_i = 0 \quad \forall\, i = 1,2,3$

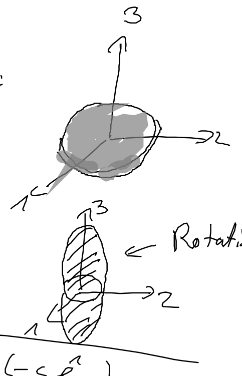
⇒ Drehachse $\underline{\omega}$ ist sowohl im körperfesten als auch im raumfesten System konstant

Kräftefreie Bewegung ≙ gleichförmige Rotation um die feste Achse $\underline{\omega}$

5.8 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

$J_1 = J_2 = J \neq J_3$

Beispiel:



$N_1 = N_2 = N_3 = 0$

(läßt sich dadurch realisieren, dass man den Kreisel im Schwerpunkt aufhängt, denn dann gilt:

$$\underline{N}^{extern}_{rel} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i' \times (\underbrace{-m_i g \hat{e}_z}_{\text{Gewichtskraft}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i'}_{0} \times (-g\hat{e}_z) = 0$$

Euler'sche Gleichungen:

$$J\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3\,(J - J_3) = 0 \qquad (1)$$
$$J\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3\,(J_3 - J) = 0 \qquad (2)$$
$$J_3\,\dot{\omega}_3 = 0 \qquad (3)$$

Bemerkung: Die ausgezeichnete Achse J_3 nennt man Figurenachse.

Beachte auch

(3) $\Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = const$ Projektion von $\underline{\omega}$ auf die Figurenachse ist konstant!

Lösung der Gleichungen (1) und (2)

(1) $\Rightarrow J\dot{\omega}_1 = (J - J_3)\,\omega_3\omega_2 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \omega_0\,\omega_2$ (1a)

(2) $\Rightarrow J\dot{\omega}_2 = (J_3 - J)\,\omega_1\omega_3 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = -\omega_0\,\omega_1$ (2a)

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{J - J_3}{J}\,\omega_3$$

2. Ableitung

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 &= \omega_0\,\dot{\omega}_2 \overset{(2a)}{=} -\omega_0^2\,\omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 &= -\omega_0\,\dot{\omega}_1 \overset{(1a)}{=} -\omega_0^2\,\omega_2 \end{aligned}}$$

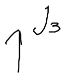
Schwingungsgleichungen!

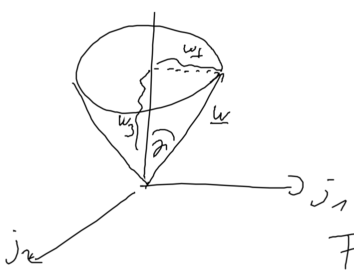
Lösung:
$$\omega_1(t) = \omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau)$$
$$\omega_2(t) = \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau)$$
mit $\omega_\perp, \tau$ Integrationskonstanten
$$\omega_3(t) = const.$$

Folgerungen:

- $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_\perp^2\left(\sin^2(\dots) + \cos^2(\dots)\right) = \omega_\perp^2 = const$
- Damit ist auch
  $$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = const\ !$$

Die Drehachse $\underline{\omega}$ hat konstante Länge und rotiert gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 auf die Hauptträgheitsachse (Figurenachse) J_3





$\underline{\omega}$ beschreibt also Kreiskegel (Polkegel) um $\hat{J}_3$ mit dem Öffnungswinkel

$$\tan\gamma = \frac{\omega_\perp}{\omega_3}$$

Folgerung für den Drehimpuls $\underline{L}_{rel}$ (im körperfest. System)

$$\underline{L}_{rel} = \underline{J}\cdot\underline{\omega} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J\omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tau) \\ J\omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tau) \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

benutze $J_3\omega_3 = J\omega_3 + (J_3 - J)\,\omega_3$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = J\underline{\omega} + (J_3 - J)\,\omega_3\,\hat{J}_3$$

$\Rightarrow$ auch der Drehimpuls <u>rotiert</u> im körperfest. Syst. und zwar so, dass $\underline{L}_{rel}$, $\underline{\omega}$ und $\hat{J}_3$ stets in einer Ebene liegen.

Bewegung im raumfesten System

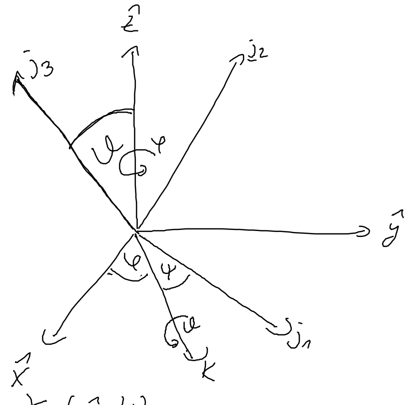
Hier gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{L}_{rel} = 0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{L}_{rel}$ bildet raumfeste Achse!

Um die Bewegung von $\underline{\omega}$ und $\hat{J}_3$ bzgl. der raumfesten Achse $\underline{L}_{rel}$ zu beschreiben benötigen wir eine Beschreibung der <u>Drehung</u> des körperfesten Systems relativ zum raumfest. Syst.

Exkurs: Euler'sche Winkel



Annahme

(K') Körperfestes System $\hat{=}$ Hauptachsen $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$

(K) Raumfestes System $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$\underline{k}$: "Knotenlinie"

Schnittlinie zwischen der (x,y) Ebene und der (j_1, j_2) Ebene:

d.h. $\underline{k}\cdot\hat{z} = 0$

und $\underline{k}\cdot\hat{J}_3 = 0$

$\varphi = \sphericalangle(\hat{x}, \underline{k})$

$\vartheta = \sphericalangle(\hat{z}, \hat{J}_3)$

$\Rightarrow$ $\dot{\varphi}$: Drehung um die $\hat{z}$-Achse

$\dot{\vartheta}$: Drehung um k

ψ : Drehung um $\underline{j}_3$

Bemerkung: Um K und K' zur Deckung zu bringen geht man wie folgt vor

i) Drehe um $\hat{\underline{z}}$ mit dem Winkel φ $\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \underline{k}$

ii) Drehe um $\underline{k}$ mit Winkel ϑ $\Rightarrow \hat{\underline{z}} = \underline{j}_3$

iii) Drehe um $\underline{j}_3$ mit Winkel ψ $\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \underline{j}_1$

(Darstellung durch Drehmatrizen

$\rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}(\psi) \cdot \underline{\underline{R}}(\vartheta) \cdot \underline{\underline{R}}(\varphi)$ $\Rightarrow$ Jede Rotation kann vollständig durch die drei Eulerwinkel ausgedrückt werden