

Wdh:

$$\dot{\underline{a}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{a}(t)$$

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

N dynamische Variablen

$$= \underline{f}(\underline{a}, t, \mu)$$

zeitunabhängige Kontrollparameter

autonome Systeme:

$$\underline{f}(\underline{a}, t, \mu) = \underline{f}(\underline{a}, \mu) \quad \text{keine explizite Zeitabhängigkeit}$$

Bsp: Hamilton-Dynamik:

$$\underline{a} = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

$$f_i = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} & , a_i = q_1, \dots, q_f \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} & , a_i = p_1, \dots, p_f \end{cases}$$

Argument von \underline{f}

Fixpunkte der Dynamik: (autonome Systeme)

$$\dot{\underline{a}} \Big|_{\underline{a}=\underline{a}^0} = \underline{f}(\underline{a}^0, \mu) = 0$$

Fixpunkt

lineare Stabilitätsanalyse. Betrachte kleine Abweichung $\delta \underline{a}(t) = \underline{a}(t) - \underline{a}^0$

in linearer Näherung:

$$\delta \dot{\underline{a}}(t) = \underline{A} \delta \underline{a}(t) \quad \text{mit} \quad (\underline{A})_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \right|_{\underline{a}^0} \quad i, k = 1, \dots, N$$

Jakobi-Matrix
zeitunabhängig!

allgemeine Lösung:

$$\delta \underline{a}(t) = \sum_{i=1}^N g_i^0 e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

$$\left(\begin{array}{l} g_i^0 = g_i(t=0) \\ \text{aus Anfangsbedingung} \end{array} \right.$$

mit λ_i : Eigenwerte von \underline{A}
 \underline{u}_i : Eigenvektoren von \underline{A}

$$\underline{A} \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$$

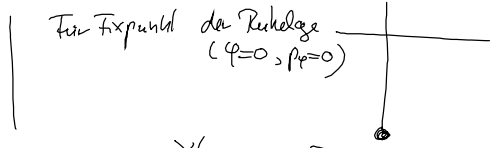
- Sind die Realteile aller Eigenwerte λ_i der Jacobimatrix negativ, so klappt jede kleine Abweichung vom Fixpunkt exponentiell mit der Zeit ab \rightarrow stabiler Fixpunkt!

z.B. Pendel mit Reibung:

$$mL^2 \ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + mgL \sin \varphi = 0$$

Reibungskonstante $\gamma > 0!$

Für Fixpunkt der Ruhelage ($\varphi=0, \dot{\varphi}=0$)



$$\underline{J}_A(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} g_1 e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} & \\ & g_2 e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \end{pmatrix}$$

- Andere Möglichkeit des stabilen Fixpunkts: rein imaginäre $\lambda_i \Rightarrow$ Zentrum

Wetres Beispiel für Stabilitätsanalyse

unsymmetrischer Kreisler mit Haupt-Trägheitsmoment $0 < J_1 < J_2 < J_3$
ohne äußere Kräfte

\Rightarrow Dynamik aus den Euler'schen Gleichungen mit dynamische Variablen

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\left(\frac{J_3 - J_2}{J_1}\right) a_2 a_3 \\ \dot{a}_2 &= -\left(\frac{J_1 - J_3}{J_2}\right) a_1 a_3 \\ \dot{a}_3 &= -\left(\frac{J_2 - J_1}{J_3}\right) a_1 a_2 \end{aligned}$$

$a_1 = \omega_1, a_2 = \omega_2, a_3 = \omega_3$
(Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$)

\Rightarrow Fixpunkte:

$$\begin{aligned} \underline{a}^{(1)} &= (\omega, 0, 0) \\ \underline{a}^{(2)} &= (0, \omega, 0) \\ \underline{a}^{(3)} &= (0, 0, \omega) \end{aligned}$$

Drehungen um eine der Hauptträgheitsachsen

Betrachte Jacobimatrix \underline{A} (mit Wert $\left. \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \right|_{\underline{a}^0}$)

bei $\underline{a}^{(1)}$

$$\Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega \\ 0 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwert $\det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = 0 \Rightarrow -\lambda \left(\lambda^2 + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_2} \right) \left(\frac{J_1 - J_2}{J_3} \right) \omega^2 \right) \stackrel{!}{=} 0$

Eigenwert:
 $0 < J_1 < J_2 < J_3$

$\lambda_1 = 0$
 $\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\underbrace{\left(\frac{J_3 - J_1}{J_2} \right) \left(\frac{J_1 - J_2}{J_3} \right)}_{> 0}} \omega$

Der Fixpunkt $q^{\circ(1)}$ (Drehung um die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment J_1)
 bildet ein Zentrum der Bewegung ($\lambda_{2,3}$ rein komplex)
 \Rightarrow stabil

Nun:
 Fixpunkt $q^{\circ(2)}$ (Drehung um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment J_2)

Eigenwert: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \pm \omega \sqrt{\underbrace{\left(\frac{J_3 - J_2}{J_1} \right) \left(\frac{J_2 - J_1}{J_3} \right)}_{> 0}}$

Einer der Eigenwerte hat positiven Realteil
 \Rightarrow Fixpunkt instabil!

Fixpunkt $q^{\circ(3)}$: stabil! (analog zu $q^{\circ(1)}$)!

V.3. Bifurkationen

Wir betrachten ein System mit einem Kontrollparameter μ

$\Rightarrow \dot{q}(t) = f(q, \mu, t)$

Betrachte wieder autonomes System

Annahme: ~~Der~~ $f(q, \mu)$ hängt stetig differenzierbar von μ ab

\Rightarrow auch die drei Fixpunkte q° und die Eigenwerte von \underline{A} verändern sich stetig mit μ

z.B. elektrisches oder magnet. Feld,
 Temperatur, Strömung, ...

Bifurkation: kritischer Wert μ_c , bei dem sich die Anzahl der Fixpunkte oder ihre Stabilität schlagartig ändern
 (verzweigt) "critical"

Beispiele : $N=1$ (eine dynamische Variable!)

① „Sattel-Knoten-Verzweigung“

$$\dot{a} = \mu - a^2 = f(a, \mu)$$

$$\text{Fixpunkte: } \dot{a} \Big|_{a^0} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a_{1,2}^0 = \pm \sqrt{\mu} \quad \text{falls } \mu > 0$$

$$\text{Stabilität: } \delta \dot{a} = A a$$

mit $A = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a^0} = (-2a) \Big|_{a^0}$

($\mu > 0$)

$$\Rightarrow \text{Fixpunkt } a_{11}^0 = +\sqrt{\mu} \Rightarrow A = -2\sqrt{\mu} \quad \text{stabil !!}$$

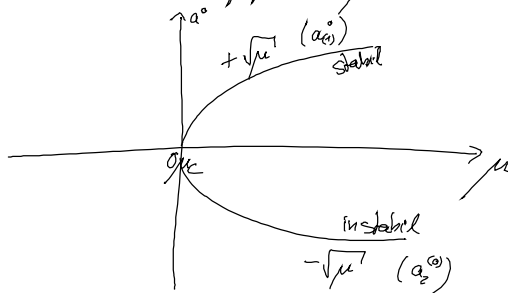
reell, negativ

$$f_a(t) \sim e^{-2\sqrt{\mu}t} \quad \text{stabil!}$$

$$\text{Fixpunkt } a_{22}^0 = -\sqrt{\mu} \Rightarrow A = +2\sqrt{\mu} \quad \text{instabil!}$$

Falls $\mu < 0$: es gibt keine stabile Fixpunkte!

$\Rightarrow \mu = 0$ bildet Verzweigungspunkt μ_c !



Für $\mu \rightarrow 0$
 „Kollision“ die beiden
 Fixpunkte, sie löschen
 sich gegenseitig aus!

② Transkritische Bifurkation

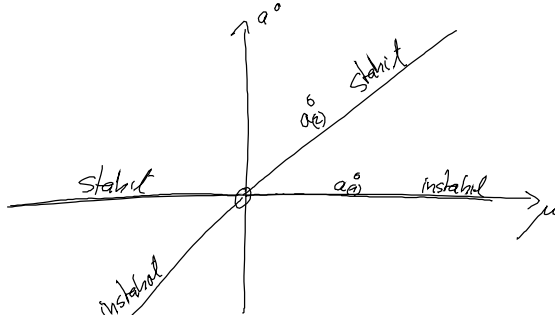
$\dot{a} = \mu a - a^2 = a(\mu - a)$, Fixpunkte: $a_{(1)}^0 = 0$, $a_{(2)}^0 = \mu$ (unabhängig von Vorzeichen von μ !)

"Stabilitätsmatrix" $A = \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{a^0} = (\mu - 2a) \Big|_{a^0}$

$a_{(1)}^0 = \begin{cases} \text{stabil für } \mu < 0 \\ \text{instabil " } \mu > 0 \end{cases}$

$(A = \mu)$

$a_{(2)}^0 = \begin{cases} \text{instabil, } \mu < 0 \\ \text{stabil, } \mu > 0 \end{cases}$
($A = -\mu$)



Bei $\mu_c = 0$ tauschen die beiden Fixpunkte ihre Stabilität aus!

③ "Stimmungsgabel-Bifurkation"

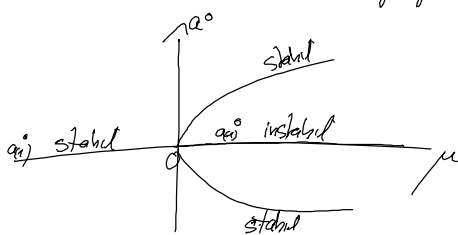
$\dot{a} = \mu a - a^3 = a(\mu - a^2)$, Fixpunkte $a_{(1)}^0 = 0$, $a_{(2,3)}^0 = \pm\sqrt{\mu}$ falls $\mu \geq 0$

Stabilität: $A = (\mu - 3a^2) \Big|_{a^0}$

$a_{(1)}^0 \Rightarrow A = \mu \Rightarrow$ stabil für $\mu < 0$
instabil für $\mu > 0$

$a_{(2,3)}^0 \Rightarrow A = -2\mu \Rightarrow$ stabil für $\mu > 0$

Keine Gleichgewichtslage (Fixpunkt) falls $\mu < 0$



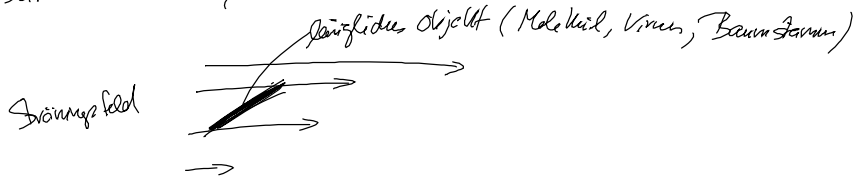
Bei $\mu_c = 0$ ändern sich die Zahl der stabilen Fixpunkte!

Bisher war $N=1$

Weitere Bifurkationstypen finden auf, wenn N größer aus ist, und wenn die Eigenwerte auch komplex sein können

"Hopf-Bifurkation"

Bei einer Hopf-Bifurkation wandelt sich ein Fixpunkt um in eine oszillatorische Dynamik



Strömung schwach: Objekt liegt stabil in der Strömung und dreht sich nicht! „stationärer Zustand“, Fixpunkt

Strömung stark: Objekt ~~fließt~~ fließt sprunghaft aus, sich zu drehen!

„Tumbling“-Bifurkation

Oszillatorische Bewegung!



mathematisches Beispiel

$$N=2: \begin{aligned} \dot{a}_1 &= \mu a_1 - a_2 - (a_1^2 + a_2^2) a_1 \\ \dot{a}_2 &= \mu a_2 + a_1 - (a_1^2 + a_2^2) a_2 \end{aligned}$$

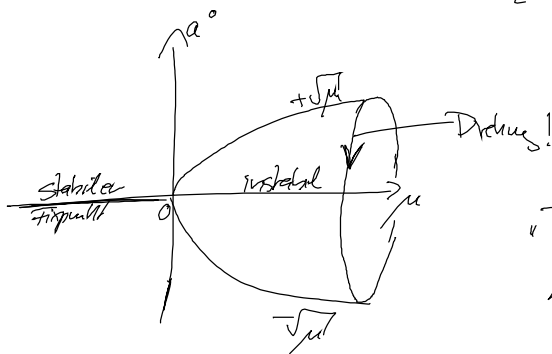
Vereinfachung durch Polarkoordinate $a_1 = r \cos \varphi$
 $a_2 = r \sin \varphi$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \dot{r} = \mu r - r^3 \quad \text{stetig genau wie die Gleichung bei der} \\ \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = t + \text{const} \quad \text{Schwingsattel-Bifurkation!}$$

Man sieht: die beide Variablen sind dynamisch entkoppelt, ~~und~~
 die Gleichung kann getrennt betrachtet werden!

Bei $\mu_c = 0$ Stabingabel = Bifurkation: in N

Jei $\mu > 0$ (stabilen) hat die Lösung: $a_1 = \sqrt{\mu} \cos t$ ($\varphi = t$)
 $a_2 = \sqrt{\mu} \sin t$ ($\cos t = 0$)
 Zeitabhängig!



Die neuen, stabilen Zustände für $\mu > \mu_c = 0$
 drehen sich um den instabilen Ast
 bei $a=0$

Bemerkungen zum Langzeitverhalten dynamischer Systeme

- Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von Anfangsbedingungen abhängt!

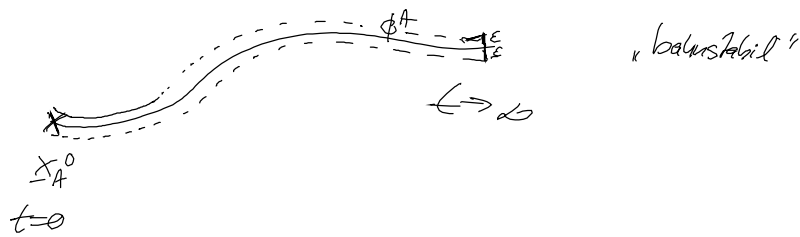
Betrachte System in Z Raumdimensionen.

Betrachte die Bahn $\phi^A(x_A^0, t)$ eines Teilchens der Masse m
 sowie eine weitere Bahn $\phi^B(x_B^0, t)$ in der Nähe dieser Bahn

Dabei sind x_A^0, x_B^0 die Startwerte der Bahnen bei $t=0$
 mit vorgegebenem Abstand $|x_A^0 - x_B^0| (= \delta)$

Die Bahn $\phi^A(x_A^0, t)$ heißt stabil

a) Alle benachbarte Bahnen ϕ^B bleiben für alle Zeiten t
 in einer " ϵ -Röhre" um ϕ^A



b) Der Abstand der Bahnen verschwindet für $t \rightarrow \infty$



Wie findet man etwas über die Lyapunov-Stabilität heraus?

Durch Linearisierung der Dynamik um die Lösungsbahn $\phi(x_A^0; t)$ läßt sich für große t immer schreiben

$$|\phi(x_A^0; t) - \phi(x_B^0; t)| \sim e^{\lambda t} \quad |x_B^0 - x_A^0| = \delta$$

wobei λ hier der „führende“ Lyapunov-Exponent ist

Folgerung:

- $\lambda < 0$: Kleine Abweichung in der Bahn ~~wandert~~ ~~aus~~ ~~stark~~ ~~exponentiell~~ aus
- $\lambda > 0$: exponentielle Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen.
„Chaos“