

Anwendungsbeispiel Lagrange II

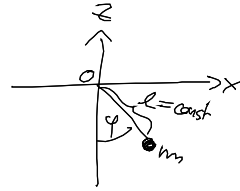
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Konservatives System  
 $\mathcal{L} = T - V$

bzw.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k=1, \dots, f$

Beispiel Fadenpendel in 2D Dimensionen

$$f=1 \quad ((x(t))^2 + (z(t))^2 = l^2)$$



$$x(t) = l \sin \varphi(t), \quad z(t) = -l \cos \varphi(t)$$

Transformationsgleichung

generalisierte Koordinate

kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \underline{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi}) \end{aligned}$$

T ausgedrückt durch generalisierte Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}$

potentielle Energie:

$$V(z) = mgz$$

$$= -mgl \cos \varphi(t) = V(\varphi) \quad \left( \text{ausgedrückt durch generalisierte Koordinate} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$= T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

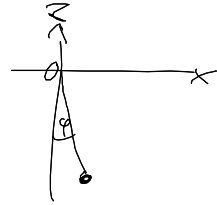
Lagrange Gleichung II. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\varphi}) + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0} \quad \textcircled{\oplus}$$

Lösung wird besonders einfach für kleine Pendelauslenkung um die Gleichgewichtslage ( $\varphi=0$ ), also kleine  $\varphi$



dann  $\sin \varphi \approx \varphi$  (erster nichtverschwindender Term in der Taylorentwicklung)

$\Rightarrow$   $m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \varphi = 0$  lineare DGL zweiter Ordnung in  $t$

Lösung: harmonische Schwingung

Ansatz:  $\varphi(t) \sim e^{i \omega_0 t}$  mit  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Weiteres Beispiel:

Gitterschwingung

gekoppelte Schwingung (Phononen in Festkörpern)

$\Rightarrow$  Übungszettel

## II.8. Spezialfall eines Systems ohne Zwangsbedingungen

betrachte <sup>konserватives</sup>  $N$ -Teilchen-System ohne irgendwelche Zwangsbedingungen  $f=3N$

generalisierte Koordinaten: benutzt einfach kartesische Koordinaten

$$\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad i=1, \dots, N$$

Lagrangefunktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2 - V(\{\underline{r}_i\})$$

mit  $\{\underline{r}_i\} = \{r_1, \dots, r_N\}$

Lagrange-Gl.

Ableitung nach Komponenten  $\alpha_i$  mit  $\alpha_i = x_i, y_i, z_i$

bzw  $\dot{\alpha}_i = \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_i} (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i}} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (-V) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \delta_{ij} - \left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \right) = 0$$

wobei

$$F_i = -\nabla_i V$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} m_i \dot{\alpha}_i = \left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \right)$$

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \right) = -\nabla_{\alpha} V$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_i \ddot{\alpha}_i = \left( \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \right)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} V$$

Wir haben also gezeigt:

In Abwesenheit von Zwangsbed. reduzieren sich die Lagrange-Gl. auf die Newton'schen BWGL

— zeigt die Konsistenz der Theorie!

## II 9. Das Hamilton'sche Extremalprinzip (Variationsprinzip)

Motivation:

Bisherige Behandlung von Systemen mit (holonom) Zwangsbedingungen

d'Alembert'sches Prinzip  $\rightarrow$  Lagrange-Gl. 2. Art

$$\left( \sum_{r=1}^N (m_r \ddot{r}_r - \overset{\text{virtuelle}}{\text{Veränder.}} F_r \right) \cdot \delta r_r = 0$$

Die gesamte virtuelle Arbeit ist Null

Interpretation:

Das d'Alembertsche Prinzip ist ein "Differenzprinzip" in dem Sinne, dass der momentane Zustand des Systems mit ~~den~~ kleinen, virtuellen, Verändere aus diesem Zustand verglichen wird

Die erhaltene Bewegung ist dann gegen kleine Verändere "stabil"  
=> Zustand ist Extremalzustand

(Beispiel: "Rütteln" an einem starren Körper aus mehreren Massenpunkten mit festen Abständen)

Zeige nun

Die Lagrange-Gl. lassen sich alternativ auch aus einem Integralprinzip herleiten, nämlich dem Hamilton'schen Variationsprinzip

Vorteile gegenüber der "historischen" Herleitung über d'Alembert:

- sehr elegante Formulierung
- Variationsprinzipien sind wichtig auch in vielen anderen Gebieten der Theoret. Physik

Grundidee des Hamilton'schen Prinzips

Vergleiche die Trajektorien (Bahnen) aller Teilchen,  $\{q_i(t)\}$ , mit kleinen Abweichungen von diesen Bahnen

Die tatsächlich angenommene Bahn macht eine Integralgröße, die sogenannte Wirkung, extremal

=> Lagrange-Gl. II. Art



Mathematische Grundlage: Variationsrechnung

# Einschub: Elemente der Variationsrechnung

Betrachte zunächst eindimensionales Problem

$$\text{Sei } I[y, y'] := \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y(x), y'(x))$$

$$\text{mit } y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

$x_1, x_2$  Randpunkte

$I$  ist ein „Funktional“ der Funktion  $y(x)$

Gesucht:

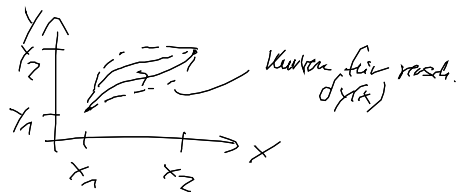
die Funktion  $y(x)$ , die an den Randpunkten vorgegebene Werte  $y_1 = y(x_1)$  und  $y_2 = y(x_2)$  annimmt und für die das Funktional  $I[y, y']$  ein Extremum annimmt

$$\text{also } \delta I \stackrel{!}{=} 0$$

Durchführung der Variation:

Führe dazu zunächst Vergleichskurven der Form  $y_\alpha(x) = y(x) + \alpha \eta(x)$

ein



gesuchte Funktion  
Parameter

$\delta y(x)$   
Verschiebung der Bahn  
(Variation)

$$\text{mit } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Variation:

$$\begin{aligned} \delta I &= I[y_\alpha, y_\alpha'] - I[y, y'] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx (f(x, y_\alpha, y_\alpha') - f(x, y, y')) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\alpha \text{ klein}}{\rightarrow} \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha'} \frac{dy_\alpha'}{d\alpha} \right)$$

Variationen sollen klein sein!

made Taylorentwicklung von  $f(x, y_\alpha, y_\alpha')$  um  $\alpha = 0$

Umschreiben des Zielforms:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{dx'}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\stackrel{\text{partiell integrieren}}{=} \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{dy}{dx} \right]_{x_1}^{x_2}}_{\text{Null, denn}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{dx'}{dx} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$f(x, y_2, y_2') \approx f(x, y, y') + \left( \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\delta y_2}{\delta x} + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \frac{\delta y_2'}{\delta x} \right) \delta x$$

Der Wert von  $\alpha$  ist am Ende egal, da wir  $\delta I = 0$  setzen !!

Null, denn

$\frac{dy}{dx} = \eta(x)$  verschwindet an den Randpunkten  $x_1$  und  $x_2$ !

$$= - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Fasse zusammen:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy}{dx} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} \quad (\neq) \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

Gesucht ist diejenige Funktion  $y(x)$ , für die  $I$  extremal ist

d.h.  $\boxed{\delta I = 0}$  für beliebige Variation  $\delta y(x)$  mit festen Randpunkten

In unserem Fall:  $\delta y(x) = \alpha \eta(x)$

$$= \frac{dy}{dx} \quad \text{mit } \alpha = 1$$

⇒ Integrand in  $\textcircled{*}$  muß für beliebige Variationen, d.h. für beliebige  $\frac{dy}{dx} = \eta(x)$  verschwinden!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad \text{Euler'sche Gleichung}$$

(oder "Euler'sche Differentialgleichung der Variationsrechnung")

Bemerkung:

Anstatt den Hilfsparameter  $\kappa$  einzuführen, kann man die Euler'sche Gleichung auch schneller so herleiten.

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \left( \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y, y') \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y') \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\delta y'}_{\frac{d}{dx} \delta y} \right) \end{aligned}$$

Annahme:  $\delta y$  und damit  $\delta y'$  klein

partielle Integration  $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \stackrel{!}{=} 0$  für alle  $\delta y$

⇒ Euler'sche Gleichung

## II.10 Herleitung der Lagrange-Gl. aus dem Hamilton'schen Prinzip

Betrachte nun System mit holonomem Zwangsbedingungen und konservativen Kräften

⇒ Es existiert eine Lagrange-Funktion

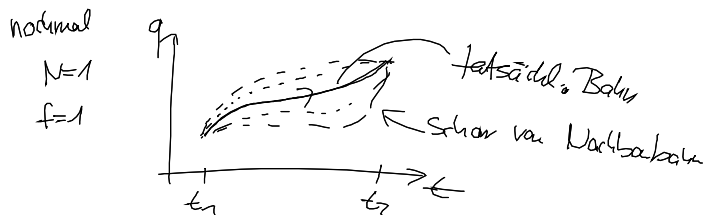
$$L = L(\dot{q}_i, q_i, t) = T - V, \quad i=1, \dots, f$$

Definiere nun das sogenannte Wirkungsintegral

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{q}_u, q_u, t)$$

Hamilton'sches Prinzip: <sup>konst.</sup>  
Die physikalische Bahnkurve (d.h. die Lösung der BWG zu gegebenen Randwerten) zeichnet sich dadurch aus, dass

$$\boxed{\delta S = 0} \quad \text{für beliebige Variationen der Bahnkurve } \delta q_u(t)$$



Wir zeigen nun:

Ausführung und Anwendung des Hamilton'schen Prinzips führt auf die bekannte Lagrange-Gl. zweiter Art!

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_f + \delta q_f, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f + \delta \dot{q}_f, t) - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \right)$$

$$\stackrel{\substack{\text{Variationen} \\ \text{klein!}}}{\approx} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k(t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q_k(t)$$

Nun partiell integrieren  $\Rightarrow$  Lagrange II. Art. Details nächste VL!