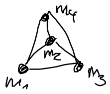
III. Mechanik des starren Körpers (siehe auch VL vor Weihnachten)

III.1. Definition des starren Körpers

a) Diskrete Massenverteilung



$N=4$ Massenpunkte mit <u>starren</u> Verbindungsvektoren

$\underline{r}_i - \underline{r}_j = \underline{d}_{ij}$ $\quad i,j = 1,\dots,N$

Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Schwerpunkt: $\underline{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i$

b) Kontinuierliche (ausgedehnte) Massenverteilung $\rho(\underline{r})$

Gesamtmasse $M = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$, Volumenintegral

Schwerpunkt: $\underline{r}_S = \int d\underline{r}\, \underline{r}\, \rho(\underline{r})$

Beispiel: Kugelförmige Verteilung, lokalisiert im Ursprung

$$\rho(\underline{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho \,, & r < R \\ 0 \,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Abstand vom Ursprung (r); Kugelradius (R)

$$\Rightarrow M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

<u>Beschreibung der Bewegung von starren Körpern</u>

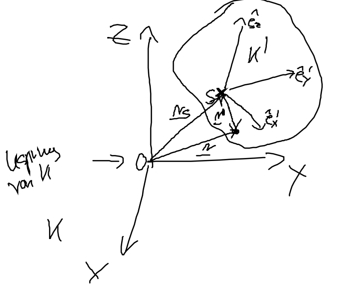
i) „raumfestes" Koordinatensystem K mit Achsen $\hat{\underline{e}}_x, \hat{\underline{e}}_y, \hat{\underline{e}}_z$ (Einheitsvektoren)

- bewegt sich <u>nicht</u> bei Bewegung des (starren) Körpers
- K ist ein Inertialsystem: System, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig (oder gar nicht) bewegt!

ii) „körperfestes" Koordinatensystem K' mit Achsen $\hat{\underline{e}}_x{}', \hat{\underline{e}}_y{}', \hat{\underline{e}}_z{}'$

- verankert mit dem Körper $\Rightarrow$ bewegt sich bei Bewegung des Körpers!

• Ursprung von K' legt man meist in den Schwerpunkt S des Körpers



Beachte: K' ist im allgemeinen kein Inertialsystem!
(da im allgemeinen gegenüber K beschleunigt bzw. rotiert!)

$\underline{r}_S$: Ortsvektor zu S (Schwerpunktsvektor) bezgl. K

$\underline{r}$ Ortsvektor eines beliebigen Punktes im Körper bezgl. K

sowohl $\underline{r}_S$ als auch $\underline{r}$ sind zeitabhängig

Führe nun noch ein:

$\underline{r}'$ Ortsvektor des Punktes bezgl. K'

$$\Rightarrow \boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'}$$

zeitunabhängig, falls der Körper wirklich starr ist!!
(Wir betrachten später auch den allgemeinen Fall, wo $\underline{r}'$ selbst auch zeitabhängig sein kann)

Für wirklich starre Körper gilt:

Es gibt 6 Freiheitsgrade:

- 3 Komponenten von $\underline{r}_S$ (Schwerpunktsvektor bezgl. K)
- 3 Winkel: Beschreibung der Orientierung von K' relativ zu K, d.h. 3 Winkel, die die Drehung von $\hat{e}_x', \hat{e}_y', \hat{e}_z'$ relativ zu $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ beschreiben!

$$\underline{\underline{f = 6}}$$

III.2. Scheinkräfte

Ausgangspunkt: $\underline{r}(t) = \underline{r}_S(t) + \underline{r}'$

$= \underline{r}_S(t) + \sum_{\alpha=1}^{3} x'_\alpha \, \hat{\underline{e}}'_\alpha \qquad \alpha = x, y, z$

Komponenten

Einheitsvektoren zur Basis von K'

betrachte nun Zeitableitungen in den beiden Systemen K und K'
→ Geschwindigkeiten

- in K' (körperfesten System): hier sind die Achsen $\hat{\underline{e}}'_\alpha$ zeitunabhängig!

$$\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} = \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{x}'_\alpha(t)\, \hat{\underline{e}}'_\alpha \qquad (*)$$

$\underline{r}'$ ist der Ortsvektor eines betrachteten Punktes im Körper bezgl. K'

Beachte: Falls der Körper wirklich völlig starr ist, dann gilt $\dot{x}'_\alpha(t) = 0$ ($x'_\alpha = \text{const}$). Für deformierbare Körper kann jedoch $\dot{x}'_\alpha \neq 0$ sein.

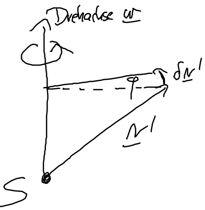
- Zeitableitung des betrachteten Punktes in K (raumfestes System)

$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \underbrace{\dot{\underline{r}}_S(t)}_{\text{Schwerpunktsgeschw. in } K} + \dot{\underline{r}}'\Big|_K$$

$$= \dot{\underline{r}}_S(t) + \sum_{\alpha=1}^{3} \Big(\underbrace{\dot{x}'_\alpha(t)\, \hat{\underline{e}}'_\alpha}_{\substack{\text{Geschwindigkeit in } K' \\ \dot{\underline{r}}'(t)|_{K'} \\ \text{siehe } (*)}} + \underbrace{x'_\alpha(t)\, \dot{\hat{\underline{e}}}'_\alpha(t)}_{\substack{\text{Geschwindigkeit eines starr mit } K' \\ \text{bewegten Punktes bezgl. } K}} \Big) \qquad (**)$$

Umformung des ~~lete~~ letzten Terms

$$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha' \, \dot{\hat{\underline{e}}}_\alpha'(t) \equiv \frac{\delta \underline{r}'}{dt}$$



($\hat{=}$ Ursprung von K')

s. auch Kapitel I (Drehbewegung)

$\frac{\delta \underline{r}'}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}'$ mit $\underline{\omega}$ Drehachse

$\omega = |\underline{\omega}|$ Winkelgeschwindigkeit

$(\omega = \dot{\varphi})$

$$\Rightarrow \frac{\delta \underline{r}'}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}' \quad , \quad \left|\frac{\delta \underline{r}'}{dt}\right| = \omega r' \sin\varphi$$

Einsetzen in (**)

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) - \underline{r}_S(t)\right)\Big|_K = \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\, \underline{r}'(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'} \quad (***)$$

Ganz allgemein: Vorschrift für die Zeit-Ableitung eines Vektors in den beiden Bezugssystemen:

$$\frac{d}{dt} \ldots\Big|_K = \frac{d}{dt} \ldots\Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \ldots$$

(.... ist der behandelte Vektor)

Weitere Folgerung aus der Tatsache

$$\dot{\underline{r}}(t)\big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\big|_K + \dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

sei speziell $\dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'} = 0$, d.h. Körper ist wirklich starr

$$\dot{\underline{r}}(t)\big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\big|_K + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

$$\underbrace{\underline{v}\big|_K}_{\text{Geschw. bzgl. }K} = \underbrace{\underline{v}_S\big|_K}_{\text{Schwerpunktsgeschw. bzgl. }K} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

betrachte speziell den Schwerpunkt des starren Körpers, d.h. $\underline{r}'=0$

$\Rightarrow \underline{v}\big|_K = \underline{v}_S\big|_K$ wie zu erwarten war!

Betrachte nun eine weitere zeitliche Ableitung $\longrightarrow$ Beschleunigung

Startpunkt: (*)

$$\dot{\underline{r}}'(t)\big|_K = \dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\underline{r}}'(t)\big|_K = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'}\right)\Big|_K + \frac{d}{dt}(\underline{\omega}\times\underline{r}')\Big|_K$$

Wende auf jeden Term die allg. Vorschrift für Zeitableitung an!

$$\boxed{\frac{d}{dt}\cdots\Big|_K = \frac{d}{dt}\cdots\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times\cdots}$$

$$= \underbrace{\ddot{\underline{r}}'\big|_{K'} + \underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'(t)\big|_{K'}}_{\text{aus dem ersten Term}}$$

$$+ \underbrace{\frac{d}{dt}(\underline{\omega}\times\underline{r}')\Big|_{K'} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}')}_{\text{aus dem zweiten Term}}$$

benutze noch:

$$\frac{d}{dt}(\underline{\omega}\times\underline{r}')\Big|_{K'} = \dot{\underline{\omega}}\big|_{K'}\times\underline{r}' + \underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'\big|_{K'} \qquad \text{Produktregel}$$

Insgesamt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} + 2\left(\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'\big|_{K'}\right) + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'\big|_{K'} + \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}'\right)} \quad (*)$$

Hieraus können wir nun eine Bewegungsgleichung für den Körper im mitbewegten Bezugsystem K' herleiten!

Multipliziere dazu $(*)$ mit der Masse m und stelle um

$$m\ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} = m\left(\frac{d}{dt}\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K - 2\,\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'\big|_{K'} - \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'\big|_{K'} - \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}'\right)\big|_{K'}\right)$$

benutze noch:

$$\frac{d}{dt}\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_K = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}(t)\big|_K - \dot{\underline{r}}_S(t)\big|_K\right)$$
$$= \ddot{\underline{r}}(t)\big|_K - \ddot{\underline{r}}_S(t)\big|_K$$
$$= m^{-1}\underline{F} - \ddot{\underline{r}}_S(t)\big|_K$$

Newton'sche BWGL in K
$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

Einsetzen

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} = \underline{F} - m\ddot{\underline{r}}_S\big|_K + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m\left(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}'\right)}$$

BWGL in K'

mit
$$\left.\begin{aligned} \underline{F}_C &= -2m\left(\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'\right) && \text{Corioliskraft} \\ \underline{F}_Z &= -m\left(\underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}'\right)\right) && \text{Zentrifugalkraft} \end{aligned}\right\} \text{Begriffe siehe Übungszettel}$$

Man sieht:
In der BWGL bzgl. K' tauchen neben $\underline{F}$ weitere Kräfte auf
diese nennt man „Scheinkräfte"

Grund für diese Scheinkräfte: Rotation von K' bezgl. K

d.h. $\underline{\omega} \neq 0$

Anders ausgedrückt:

K' ist kein Inertialsystem, falls $\underline{\omega} \neq 0$ (oder auch $\ddot{\underline{r}}_S \neq 0$)

III.3. Kinetische Energie und Trägheitstensor

Setze fest: Ursprung von K' sei immer im Schwerpunkt S des Körpers

Dann folgt:

a) Diskrete Massenverteilung:

Ortsvektor bezgl. K

$$\underline{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Schwerpunkt bezgl. K

bezgl. K

"Schwerpunkt in K'" $:= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_S)$

Ortsvektoren bezgl. K'

$$= \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}_{= \underline{r}_S} - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_S$$

$$= \underline{r}_S - \underline{r}_S \cdot \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i}_{1}$$

$$= \underline{r}_S - \underline{r}_S = 0$$ wie zu erwarten war!

b) Kontinuierliche Massenverteilung:

Schwerpunkt in K: $\underline{r}_S = \frac{1}{M}\int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})\, \underline{r} \quad , \quad M = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$

Schwerpunkt bezgl. K'

$$\frac{1}{M}\int d\underline{r}'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') = \frac{1}{M}\int d\underline{r}'\,\underline{r}\,\rho(\underline{r}') - \frac{1}{M}\int d\underline{r}'\,\underline{r}_S\,\rho(\underline{r}')$$

Ortsvektoren bezgl. K'

$$= \frac{1}{M}\int d\underline{r}'\,\underline{r}\,\rho(\underline{r}') - \underline{r}_S\,\underbrace{\frac{1}{M}\underbrace{\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')}_{M}}_{1}$$

lege zur Auswertung des Integrals $\underline{r}_S = 0$

$\Rightarrow \underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_S = \underline{r}$

$$= \underline{r}_S - \underline{r}_S = 0$$