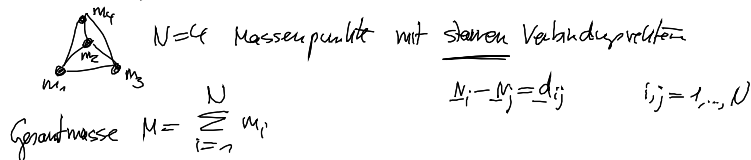


III. Mechanik des starren Körpers
 (siehe auch VL von Heurachler)

III.1. Definition des starren Körpers

a) Diskrete Massenverteilung



Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Schwerpunkt: $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

b) Kontinuierliche (ausgedehnte) Massenverteilung $\rho(\vec{r})$

Gesamtmasse $M = \int dV \rho(\vec{r})$
Volumenintegral

Schwerpunkt: $\vec{r}_S = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$

Beispiel: Kugelförmige Verteilung, lokalisiert im Ursprung

Kugelradius

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho & r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abstand vom Ursprung

$$\Rightarrow M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

Beschreibung der Bewegung von starren Körpern

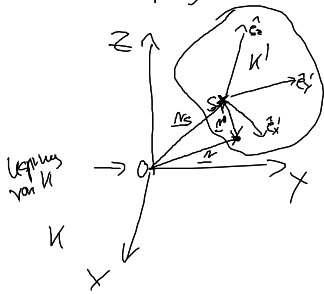
i) „Raumfestes“ Koordinatensystem mit Achsen $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$
K Einheitsvektoren

- bewegt sich nicht bei Bewegung des (starr)en Körpers
- K ist ein Inertialsystem: System, in dem sich ein kraftfreier Körper geradlinig und gleichförmig (oder gar nicht) bewegt!

ii) „Körperfestes“ Koordinatensystem mit Achsen $\hat{e}'_x, \hat{e}'_y, \hat{e}'_z$
K'

- verankert mit dem Körper \Rightarrow bewegt sich bei Bewegung des Körpers!

• Ursprung von K' legt man meist in den Schwerpunkt S des Körpers



Beachte: K' ist im allgemeinen kein Inertialsystem!
(da im allgemeinen gegenüber K beschleunigt ist bzw. rotiert!)

\underline{n}_S : Ortsvektor zu S (Schwerpunktsvektor) bezgl. K
 \underline{n} : Ortsvektor eines beliebigen Punktes im Körper bezgl. K } Sowohl \underline{n}_S als auch \underline{n} sind zeitabhängig

Teile nun noch ein:

\underline{n}' : Ortsvektor des Punktes bezgl. K'

$$\Rightarrow \underline{n}(\epsilon) = \underline{n}_S(\epsilon) + \underline{n}'$$

Zeitunabhängig, falls der Körper wirklich starr ist!!

(Wir betrachten später auch den allgemeinen Fall, wo \underline{n}' selbst auch zeitabhängig sein kann)

Für wirklich starr Körper gilt:

Es gibt 6 Freiheitsgrade:

- 3 Komponenten von \underline{n}_S (Schwerpunktsvektor bezgl. K)
- 3 Winkel: Beschreibung der Orientierung von K' relativ zu K , d.h. 3 Winkel, die die Drehung von $\hat{e}_x', \hat{e}_y', \hat{e}_z'$ relativ zu $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ beschreiben!

$$\underline{f} = 6$$

III.2. Scheinkräfte

Ausgangspunkt: $\underline{r}(\epsilon) = \underline{r}_S(\epsilon) + \underline{r}'$
 $= \underline{r}_S(\epsilon) + \sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha \hat{e}'_\alpha$ $\alpha = x, y, z$

$\left. \begin{array}{l} \text{Einheitsvektoren zur Basis von } K' \\ \text{Komponenten} \end{array} \right\}$

betrachte nun Zeitableitungen in den beiden Systemen K und K'
 \rightarrow Geschwindigkeiten

• in K' (körperfesten System): hier sind die Achsen \hat{e}'_α zeitunabhängig!

$\textcircled{*}$ $\left. \frac{d}{dt} \right|_{K'} \underline{r}' = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{x}'_\alpha(t) \hat{e}'_\alpha$

Beachte: Falls das Körper wirklich
 völlig star ist, dann gilt $\dot{x}'_\alpha(t) = 0$
 $(x'_\alpha = \text{const})$. Für deformierbare Körper
 kann jedoch $\dot{x}'_\alpha \neq 0$ sein.

\hat{e}'_α ist der Ortsvektor
 eines betrachteten
 Punktes im Körper
 bezgl. K'

betrachten
 • Zeitableitung des Punktes in K (raumfestes System)

$\textcircled{**}$ $\left. \frac{d}{dt} \right|_K \underline{r}(\epsilon) = \left. \frac{d}{dt} \right|_K \underline{r}_S(\epsilon) + \left. \frac{d}{dt} \right|_K \underline{r}'$

Schwerpunkt-
 geräte in K

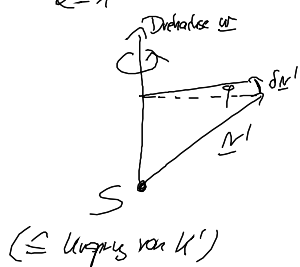
$= \underline{\dot{r}}_S(\epsilon) + \sum_{\alpha=1}^3 \left(\underbrace{\dot{x}'_\alpha(t) \hat{e}'_\alpha}_{\text{Geschwindigkeit in } K'} + \underbrace{x'_\alpha(t) \dot{\hat{e}}'_\alpha(t)}_{\text{Geschwindigkeit eines star mit } K' \text{ bewegten Punktes bezgl. } K} \right)$

$\left. \frac{d}{dt} \right|_{K'}$
 siehe $\textcircled{*}$

Geschwindigkeit eines
 star mit K' bewegten Punktes
 bezgl. K

Umformung des ~~letzten~~ letzten Terms

$$\sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha}' \dot{s}_{\alpha}'(\epsilon) \equiv \frac{d\underline{r}'}{dt}$$



s. auch Kapitel I (Drehbewegung)

$$\frac{d\underline{r}'}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}' \quad \text{mit } \underline{\omega} \text{ Drehachse}$$

$$\omega = |\underline{\omega}| \text{ Winkelgeschwindigkeit} \\ (\omega = \dot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}'}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}' \quad , \quad \left| \frac{d\underline{r}'}{dt} \right| = \omega r' \sin \varphi$$

Einsetzen in ~~(*)~~ (*)

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}(\epsilon) \Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(\epsilon) \Big|_K + \dot{\underline{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\underline{r}(\epsilon) - \underline{r}_S(\epsilon)) \Big|_K = \dot{\underline{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \underline{r}'(\epsilon) \Big|_K = \dot{\underline{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'} \quad (*)$$

Ganz allgemein: Vorschrift für die zeitl. Ableitung eines Vektors in den beiden Bezugssystemen:

$$\frac{d}{dt} \dots \Big|_K = \frac{d}{dt} \dots \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \dots \quad (\dots \text{ ist das betrachtete Vektor})$$

Weitere Folgerung aus der Tatsache

$$\underline{\dot{r}}(\epsilon)|_K = \underline{\dot{r}}_S(\epsilon)|_K + \underline{\dot{r}}'(\epsilon)|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

Sei speziell $\underline{\dot{r}}'(\epsilon)|_{K'} = 0$, d.h. Körper ist wirklich starr

$$\underline{\dot{r}}(\epsilon)|_K = \underline{\dot{r}}_S(\epsilon)|_K + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\underline{v}|_K = \underline{v}_S|_K + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Gedw. best. } K \\ \text{Schwerpunktsgerade} \\ \text{best. } K \end{array} \right\}$

betrachte speziell den Schwerpunkt des starren Körpers, d.h. $\underline{r}' = 0$

$$\Rightarrow \underline{v}|_K = \underline{v}_S|_K \quad \text{wie zu erwarten war!}$$

Betrachte nun eine weitere zeitliche Ableitung \rightarrow Beschleunigung

Startpunkt: ~~(*)~~

$$\underline{\dot{r}}(\epsilon)|_K = \underline{\dot{r}}'(\epsilon)|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\dot{r}}(\epsilon)|_K = \frac{d}{dt} \left(\underline{\dot{r}}'(\epsilon)|_{K'} \right) \Big|_K + \frac{d}{dt} (\underline{\omega} \times \underline{r}') \Big|_K$$

$$= \underline{\ddot{r}}'|_{K'} + \underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'|_{K'} \quad \left. \begin{array}{l} \text{aus dem} \\ \text{ersten Term} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{d}{dt} (\underline{\omega} \times \underline{r}') \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \quad \left. \begin{array}{l} \text{aus dem} \\ \text{zweiten Term} \end{array} \right\}$$

Wende auf jeden Term die allg. Vorschrift für Zeitableitung an!

$$\boxed{\frac{d}{dt} \dots \Big|_K = \frac{d}{dt} \dots \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times \dots}$$

benutze noch:

$$\frac{d}{dt} (\underline{\omega} \times \underline{r}') \Big|_{K'} = \dot{\underline{\omega}} \Big|_{K'} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}'|_{K'}$$

Produktregel

Insgesamt:

$$\left. \frac{d}{dt} \underline{\dot{r}}'(\epsilon) \right|_{K'} = \underline{\ddot{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} + 2(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}' \Big|_{K'}) + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' \Big|_{K'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \quad (*)$$

Hieraus können wir nun eine Bewegungsgleichung für den Körper im mitbewegten Bezugssystem K' herleiten!

Multiplikation dazu $(*)$ mit der Masse m und stelle um

$$m \underline{\ddot{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} = m \left(\frac{d}{dt} \underline{\dot{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} - 2 \underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}' \Big|_{K'} - \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' \Big|_{K'} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \Big|_{K'} \right)$$

benutze noch.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{\dot{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} &= \frac{d}{dt} (\underline{\dot{r}}(\epsilon) \Big|_K - \underline{\dot{r}}_S(\epsilon) \Big|_K) \\ &= \underline{\ddot{r}}(\epsilon) \Big|_K - \underline{\ddot{r}}_S(\epsilon) \Big|_K \\ &= m^{-1} \underline{F} - \underline{\ddot{r}}_S(\epsilon) \Big|_K \end{aligned}$$

Newton'sche BWGC
in K
 $m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$

Einsetzen

$$\Rightarrow \left[m \underline{\ddot{r}}'(\epsilon) \Big|_{K'} = \underline{F} - m \underline{\ddot{r}}_S \Big|_K + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m (\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}') \right]$$

BWGC in K'

$$\begin{aligned} \text{mit } \underline{F}_C &= -2m(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}') & \text{Coriolis-Kraft} \\ \underline{F}_Z &= -m(\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')) & \text{Zentrifugalkraft} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{F}_C \\ \underline{F}_Z \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Beigred} \\ \text{sidu} \\ \text{Uhrspindel} \end{array}$$

Man sieht:

In der BWGC bezgl. K' tauchen neben \underline{F} weitere Kräfte auf diese nennt man „Scheinkräfte“

Grund für diese Scheinkräfte: Rotation von K' bezgl. K
d.h. $\underline{w} \neq 0$

Anderes ausgedrückt:

K' ist kein Inertialsystem, falls $\underline{w} \neq 0$ (oder auch $\dot{\underline{r}}_S \neq 0$)

III.3. Kinetische Energie und Trägheitsmoment

Setze fest: Ursprung von K' sei immer im Schwerpunkt S des Körpers

Dann folgt:

a) Diskrete Masseverteilung: ↙ Ortsvektor bezgl. K

$$\underline{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Schwerpunkt bezgl. K

"Schwerpunkt in K' " ↙ bezgl. K

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}'_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_S)$$

↙ Ortsvektoren bezgl. K'

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_S$$

$$= \frac{\underline{r}_S}{1} - \frac{\underline{r}_S}{1} \cdot \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i$$

$$= \underline{r}_S - \underline{r}_S = 0 \quad \text{wie zu erwarten war!}$$

b) Kontinuierliche Masseverteilung:

Schwerpunkt in K : $\underline{r}_S = \frac{1}{M} \int d\underline{r} \, g(\underline{r}) \underline{r}, \quad M = \int d\underline{r} \, g(\underline{r})$

Urschwerpunkt bezg. K'

$$\frac{1}{M} \int d\mathbf{r}' \underline{r}' \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{M} \int d\mathbf{r}' \underline{r} \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{M} \int d\mathbf{r}' \underline{r}_S \rho(\mathbf{r}')$$

Umschreiben bezg. K'

$$= \frac{1}{M} \int d\mathbf{r}' \underline{r} \rho(\mathbf{r}') - \underline{r}_S \underbrace{\frac{1}{M} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')}_1$$

lege zur Annahme
des Integral $\underline{r}_S = 0$

$$\Rightarrow \underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_S = \underline{r}$$
$$= \underline{r}_S - \underline{r}_S = 0$$