Wh:

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

mit $f = f(\{q_k\},\{p_k\},t)$

$g = g(\{q_k\},\{p_k\},t)$

Poisson Klammer

klassische „Observablen"

Zeitentwicklung einer Observable:

$$\frac{dg}{dt} = \ldots = \{g,H\} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}}_{\text{nur relevant, falls } g \text{ explizit zeitabhängig}}$$

Fundamentale Poisson-Klammer: $\{q_k, q_l\} = 0$, $\{p_k, p_l\} = 0$

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$

Poissonklammern sind generalisierte Skalarprodukte (schiefsymmetr. Bilinearformen) im Phasenraum

$$\{f,g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)$$

$$= \underline{f}_x^T \, \underline{\underline{J}} \, \underline{g}_x$$

wobei $\underline{f}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial q_f} \\ \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_f} \end{pmatrix}$, entsprechend $\underline{g}_x$

2f-dimensionale Vektoren!

und $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$

$2f \times 2f$ Matrix

man kann auch schreiben:

$$\dot{x}_\gamma = \{x_\gamma, H\} \quad \text{mit } x_\gamma = (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha}}_{\delta_{\gamma\alpha}} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{\gamma\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = \left(\underline{\underline{J}} \, \underline{H}_x \right)_\gamma$$

hier: $\underline{f} = \underline{x}$

$\underline{g} = H$

also $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}} \, \underline{H}_x$ konsistent mit unserem früheren Ergebnis!

Kanon. Gleichungen!

Zeige nun:

Die Poissonklammer ist invariant unter kanonischer Transformation!

Ausgangspunkt:

Kanon. Transformation $\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix dieser Transformation (Matrix der zweiten Ableitungen)

$\underline{\underline{M}}$ mit Elementen $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ $\quad \left((\underline{\underline{M}}^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \right)$

„symplektisch": $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$

Invarianz der Poissonklammer gegenüber kanon. Transformation bedeutet:

$$\{f, g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x) \stackrel{!}{=} (\underline{f}_y, \underline{g}_y) \quad \text{wobei } \underline{f}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial Q_f} \\ \frac{\partial f}{\partial P_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial P_f} \end{pmatrix}, \ \underline{g}_y \text{ analog}$$

Um dies zu zeigen,
betrachte:

Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \left((\underline{\underline{M}}^{-1})^T \right)_{\gamma\alpha} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{f}_x = \left((\underline{\underline{M}}^{-1})^T \right) \underline{f}_y$$

analog $\underline{g}_x = \left((\underline{\underline{M}}^{-1})^T \right) \underline{g}_y$

$$\Leftrightarrow \underline{f}_x^T = \underline{f}_y^T \underline{\underline{M}}^{-1} \quad (*)$$

Skalarprodukt

Def. des Skalarprodukts

$$(\underline{f}_x, \underline{g}_x) = \underline{f}_x^T \underline{\underline{J}}\, \underline{g}_x \stackrel{(*)}{=} \underline{f}_y^T \underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^{-1})^T}_{\underline{\underline{J}}} \underline{g}_y$$

Bew.: $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^{-1})^T = \underline{\underline{J}}$

benutze dazu, dass $\underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{M}}^T\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{M}}^{-1}$ (**)

das stimmt, weil

$$\underline{\underline{J}}^{-1}\underbrace{\underline{\underline{M}}^T\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}} \quad \text{q.e.d.}$$

denn $\underline{\underline{M}}$ ist symplektisch!!

mit (**)

$$\Rightarrow \overbrace{\underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{M}}^T\underline{\underline{J}}}^{\underline{\underline{M}}^{-1}}\,\underbrace{\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{J}}}_{-\underline{\underline{1}}}\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T = \underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{M}}^T(-\underline{\underline{1}})\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$= -\underline{\underline{J}}^{-1}\underline{\underline{M}}^T\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$= \underbrace{-\underline{\underline{J}}^{-1}}_{\underline{\underline{J}}}\Big(\underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{1}}}\Big)^T = \underline{\underline{J}}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T = \underline{\underline{J}}$ stimmt!

Zurück zum Skalarprodukt.

$$\{f,g\} = (\underline{f}_x, \underline{g}_x) = \underline{f}_x^T\underline{\underline{J}}\,\underline{g}_x = \underline{f}_Y^T\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T\underline{g}_Y$$

$$= \underline{f}_Y^T\underline{\underline{J}}\,\underline{g}_Y$$

$$= (\underline{f}_Y, \underline{g}_Y) \quad \text{q.e.d}$$

Poissonklammer ist also tatsächl. invariant unter kanon. Transformation

$\Leftrightarrow$ Das Ergebnis der Poissonklammer ist unabhängig von dem Satz kanonischer Variablen, mit der man sie auswertet!!

<u>Zeige schließlich:</u>

Poissonklammer können als <u>Kriterium</u> für kanon. Transformation verwend. werden

Es gilt:

Die Transformation $(\{q_k\},\{p_k\}) \longrightarrow (\{Q_k\},\{P_k\})$ ist genau dann kanonisch, wenn

fundamentale Poissonklammern in den transformierten Variablen

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \\ \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \end{cases} \qquad i,j = 1, \dots, f$$

Betrachte dazu nicht explizit zeitabhängige Transformation

$\Rightarrow$ für die Erzeugende M gilt $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$

$\Longleftrightarrow \widetilde{H} = H$

beachte: M ist hier die Erzeugende, nicht die Matrix $\underline{\underline{M}}$!!

wir hatten (z.B. $\widetilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$)

hier: $\widetilde{H} = H$

betrachte Bewegungsgleichung für die Komponente des Vektors $\underline{Y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$

Zeitentwicklung Komponente

$$\dot{Y}_\gamma = \{Y_\gamma, \widetilde{H}\} = \{Y_\gamma, H\}$$

$\widetilde{H} = H$

als Skalarprodukt umschreiben

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$

bilde also die Poissonklammer in den alten Koordinaten. Das ist möglich wegen der Invarianz der Poissonklammer gegenüber kanon. Transformation

Kettenregel

$$= \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial Y_\delta} \frac{\partial Y_\delta}{\partial x_\beta}$$

$$\sum_{\delta=1}^{2f}$$

$$\Rightarrow \dot{Y}_\gamma = \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial Y_\delta} \underbrace{\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial Y_\delta}{\partial x_\beta}}$$

$$= \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial Y_\delta} \cdot \{Y_\gamma, Y_\delta\}$$

$$\dot{Y}_\gamma = \sum_{\delta=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial Y_\delta} \{Y_\gamma, Y_\delta\} \quad (1)$$

Andererseits wissen wir:

$$\dot{Y}_\gamma = (\underline{\underline{J}}\, \underline{H}_Y)_\gamma = \sum_{\delta=1}^{2f} J_{\gamma\delta} \frac{\partial H}{\partial Y_\delta} \quad (2)$$

Hamilton'sche Gl. in den transformierten Koordinaten

Damit (1) und (2) konsistent sind, muss offensichtlich gelten:

$$\{Y_\gamma, Y_\delta\} \overset{!}{=} J_{\gamma\delta} \qquad \text{bzw.} \quad \underline{Y}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{Y} = \underline{\underline{J}}$$

Das bedeutet aufgeschlüsselt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0 \\ &\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \end{aligned}}$$

Fundamentale Poissonklammern in den neuen Variablen!

Zusammenfassung

Gegeben sei eine kanonische Transformation $\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \to \underline{Y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$

Dann gilt:

a) mit $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ gilt auch $\dot{\underline{Y}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{\hat{H}}_Y$

Invarianz der kanonischen Gleichungen

b) Die Poisson-Klammern sind invariant

c) Speziell sind die fundamentalen Poisson-Klammern invariant

d.h. $\{x_\alpha, x_\beta\} = J_{\alpha\beta} = \{y_\alpha, y_\beta\}$

d) Die Jacobi-Matrix $\underline{\underline{M}}$ mit $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ ist „symplektisch"

d.h. $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$

Matrix der 2. Ableitungen der Erzeugende M (davon gibt es vier Typen!)

Poisson-Klammer und Quantenmechanik

Übergang von Klass. Mechanik (Hamilton-Mechanik) zur Quantenmechanik erfolgt mit Hilfe des Korrespondenzprinzips

- Observable $g(\{q_k\},\{p_k\},t)$ ⟶ quantenmechanischer Operator $\hat{g}$ im Hilbertraum

(meßbare physikal. Größe

Phasenraumvariablen

z.B. Energie, Impuls

- Meßwerte von g ⟶ Eigenwerte des Operators $\hat{g}$

- Poisson-Klammer ⟶ Kommutator zw. zwei Operatoren

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{f},\hat{g}] := \frac{1}{i\hbar}(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f})$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

mit h Planck'sches Wirkungsquantum

- Beweg.gl. für Observable

$$\frac{dg}{dt} = \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \longrightarrow \frac{d}{dt}\hat{g} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{g},\hat{H}] + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}$$

quantenmechan. Beweg.gl. im Heisenbergbild

wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist!

- Fundamentale Poissonklammern

$\{q_i, q_k\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ $\longrightarrow$ Fundamentale Vertauschungsrelationen

$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0$ mit $\hat{q}_i$ Ortsoperator

$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ $\hat{p}_i$ Impulsoperator

$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\, \delta_{ij}$

Bedeutung: Orte und Impulse sind nicht gleichzeitig scharf meßbar

$\rightarrow$ Heisenberg'sche Unschärferelation!

II 17. Die Hamilton-Jacobi-Theorie

Idee: Suche (für gegebenes mechanisches Problem) eine kanonische Transformation derart, dass <u>alle</u> Variablen $\{Q_k\}$, $\{P_k\}$ zeitlich konstant werden

$\Rightarrow$ besonders einfache Lösung des mechan. Problems!

Erinnerung an die Motivation zur Einführung kanon. Transformationen:

es seien alle Q_k zyklisch, d.h. $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, f$

$\Rightarrow \dot{P}_k = 0$, d.h. $P_k = \alpha_k = \text{const}$

$\Rightarrow$ Reduktion der Zahl der tatsächl. Variablen

dann gilt $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$ hängt dann höchstens noch von der Zeit ab!

$\rightarrow Q_k = a_k t + b_k$

$a_k = \text{const}, b_k = \text{const}!$

Jetzt (im Rahmen von Hamilton-Jacobi):

Fordere zeitliche Konstanz sowohl der Impulse als auch der Koordinaten, also

$P_k = \alpha_k = \text{const}$ $\quad (\Leftrightarrow \dot{P}_k = 0)$

$Q_k = \beta_k = \text{const}$ $\quad (\Leftrightarrow \dot{Q}_k = 0)$

(wir wissen $\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$, $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$)

Die einfachste transformierte Hamiltonfunktion, für die diese Forderungen erfüllt sind, ist gegeben

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \qquad \text{(Ansatz!)}$$

„alte" Hamiltonfunktion

denn:

$$\Longrightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$$

$$\Longrightarrow \dot{P}_k = 0, \; \dot{Q}_k = 0$$