Euler Winkel Zusammenhang mit den Winkelgeschwindigkeiten

Beachte: Rotation bedeutet Änderung der Euler'schen Winkel

$\dot\varphi$: Drehung um $\hat{\underline{z}}$

$\dot\vartheta$: Drehung um $\hat{\underline{k}}$

$\dot\psi$: Drehung um $\bar{e}_3$

Zerlege:

$$\underline{\omega} = \dot\varphi\, \hat{\underline{z}} + \dot\vartheta\, \underline{k} + \dot\psi\, \bar{e}_3$$

drücke nun die Drehachse durch die Hauptachsen aus

$$= \dot\varphi \left(\sin\vartheta \sin\psi\, \bar{e}_1 + \sin\vartheta \cos\psi\, \bar{e}_2 + \cos\vartheta\, \bar{e}_3 \right) + \dot\vartheta \left(\cos\psi\, \bar{e}_1 - \sin\psi\, \bar{e}_2 \right) + \dot\psi\, \bar{e}_3$$

$$\overset{!}{=} \omega_1\, \bar{e}_1 + \omega_2\, \bar{e}_2 + \omega_3\, \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi \\ \omega_2 &= \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi \end{aligned}} \qquad \circledast$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgl. für die Euler'schen Winkel, falls $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bekannt!

Ende Euler'sche Winkel

Zurück zur raumfesten Beschreibung des symmetrischen Kreisel

$$\dot{\underline{L}}_{rel}(t) = 0$$

setze o. B. d. A. $\underline{L}_{rel} = L_{rel}\, \hat{\underline{z}}$ $\swarrow$ z - Achse des raumfesten Systems

benutze nun Euler'sche Winkel zur Zerlegung von $\hat{\underline{z}}$ entlang der Hauptachsen

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = L_{rel} \sin\vartheta \sin\psi\, \bar{e}_1 + L_{rel} \sin\vartheta \cos\psi\, \bar{e}_2$$

$$+ L_{rel} \cos\vartheta \, \hat{e}_3$$

Weiterhin wissen wir $\boxed{* \; *}$

$$\underline{L}_{rel} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} = J \overbrace{\omega_\perp \sin(\omega_0 t + \tilde{\tau})}^{\omega_1} + J \overbrace{\omega_\perp \cos(\omega_0 t + \tilde{\tau})}^{\omega_2} + J_3 \omega_3 \hat{e}_3 \qquad \boxed{* * *}$$

Kombiniere $\boxed{\times\times}$ und $\boxed{\times\times\times}$ mit den BWGL für die Euler'schen Winkel $\boxed{*}$

parallel

$$\begin{aligned}
J\omega_1 &\overset{\boxed{*}}{=} J\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\sin\psi + J\dot{\vartheta}\cos\psi \overset{!}{=} L_{rel}\sin\vartheta\,\sin\psi \\
J\omega_2 &\overset{\boxed{*}}{=} J\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\cos\psi - J\dot{\vartheta}\sin\psi \overset{!}{=} L_{rel}\sin\vartheta\,\cos\psi \\
J_3\omega_3 &\overset{\boxed{*}}{=} J_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) \overset{!}{=} L_{rel}\cos\vartheta
\end{aligned}$$

nur lösbar mit $\dot{\vartheta}$, d.h. $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$
und $\dot{\varphi} = \text{const}$

Diese unabhängig + senkrecht

Die BWGL $\boxed{*}$ reduzieren sich dann auf

$$\omega_1 = \omega_\perp \left(\sin(\omega_0 t + \tilde{\tau})\right) = \dot{\varphi}\sin\vartheta_0 \sin\psi$$

$$\omega_2 = \omega_\perp \left(\cos\omega_0(t + \tilde{\tau})\right) = \dot{\varphi}\sin\vartheta_0 \cos\psi$$

$$\underset{\text{const}}{\omega_3} = \dot{\varphi}\cos\vartheta_0 + \dot{\psi}$$

Lösung:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \tilde{\tau} = \frac{J - J_3}{J}\omega_3 t + \tilde{\tau}$$

$$\varphi(t) = \frac{\omega_\perp}{\sin\vartheta_0} t + \varphi_0$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{mit} \quad \tan\vartheta_0 = \frac{\omega_\perp J}{\omega_0 J_3}$$

vollständige Lösung der BWGL!

Diskussion (im raumfesten System)

- $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ mit $\vartheta = \measuredangle(\hat{z}, \hat{e}_3)$

Figurenachse

Achse des Drehimpulses

$\rightarrow$ Figurenachse bewegt sich mit konstantem Öffnungswinkel ϑ_0 und konstanter Winkelgeschw. $\dot{\varphi}$ um $\underline{L}_{rel}$ herum

$\rightarrow$ "Nutationskegel"

- $\dot{\psi} = \omega_0 = \frac{J - J_3}{J}\omega_3$: Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Körper auf dem Polkegel um $\hat{e}_3$ dreht (siehe Diskussion im Körperfesten System)

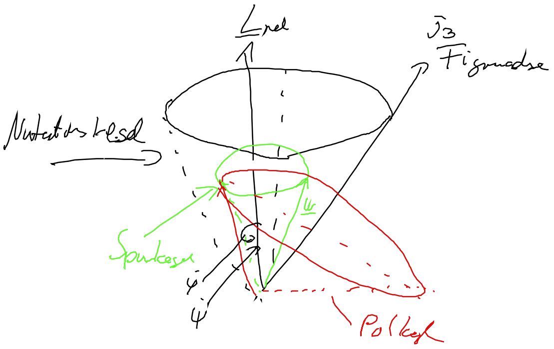
- totale Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{\underline{z}} + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$$ liegt immer in einer Ebene mit $\hat{e}_3$ und $\underline{L}_{rel}$

$\rightarrow$ $\underline{\omega}$ bewegt sich auf dem "Spurkegel" um $\underline{L}_{rel}$.

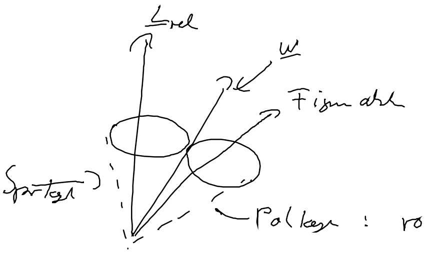
Veranschaulichung:

a) $J < J_3 \rightarrow \underline{\dot{\Psi}} = \dot{\Psi}\, \underline{e}_3$ antiparallel zur Figurenachse



Polkegel rollt mit seiner Innenfläche auf dem Mantel des Spurkegels ab.

b) $J > J_3$ $\underline{\dot{\Psi}}$ parallel zur Figurenachse!

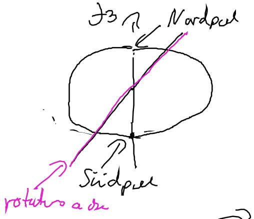


Polkegel: rollt mit seinem äußeren Mantel auf dem Spurkegel ab.

Beispiel

Die Erde:

abgeplattetes Rotationsellipsoid, also in guter Näherung symmetr. Kreisel.



mit $J_1 = J_2 = J < J_3$

$$\frac{J_3 - J}{J} \approx \frac{1}{300} \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{\omega_3}{300}$$

$\rightarrow \underline{\omega} \neq \underline{e}_3$

$\rightarrow$ Bewegung der Rotations- um die Polachse mit Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 300 \frac{2\pi}{\omega_3} \approx 300 \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{1 \text{ Tag}} = 300 \text{ Tage}$$

In Wirklichkeit: 427 Tage! und: keine gleichförmige Präzession

Gründe: • Erde kein idealer starrer Körper, sondern etwas elastisch

- Kleine Verschiebung der Masseverteilung (atmosphärische Bewegung) → unregelmäßige Präzession.

5.9 Lagrange - Beschreibung des starren Körpers

Zunächst: Lagrangefunktion (im Hauptträgheitsachsensystem) generalisierte Koordinaten, Euler'schen Winkel!

$$L = T - V \quad \text{mit} \quad T = T^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i^2$$

mit
$$\omega_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}$$

BWGL im kräftefreien Fall $(V=0)$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\psi} - \frac{\partial T}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\psi}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(J_3\omega_3\cdot 1\right) - J_1\omega_1\left(\dot{\vartheta}(-\sin\psi) + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi\right)$$
$$- J_2\omega_2\left(-\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi - \dot{\vartheta}\cos\psi\right)$$

$$= J_3\dot{\omega}_3 - J_1\omega_1\omega_2 + J_2\omega_2\omega_1$$
$$= J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

analog für die anderen Winkel → entspricht der 3. Euler'schen Gleichung.

kanonische Impulse

- $$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial T^{rot}}{\partial\dot{\psi}} = J_3\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{\psi}} = \overset{\underline{L}_{rot}\cdot\underline{J}_3}{\overbrace{J_3\omega_3}} = J_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})$$

Projektion von $\underline{L}_{rot}$ auf die körperfeste $\underline{J}_3$ Achse (Beachte: Symmetr. Kreisel $\Rightarrow \omega_3 = const$ $\Rightarrow p_\psi$ ist erhalten)

- $$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial T^{rot}}{\partial\dot{\varphi}} = \sum_{i=1}^{3} J_i\omega_i\frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{\varphi}}$$

$= J_1 \omega_1 \sin\vartheta \sin\psi + J_2 \omega_2 \sin\vartheta \cos\psi + J_3 \omega_3 \cos\vartheta$

benutze $\hat{z} = \sin\vartheta \sin\psi \, \hat{j}_1 + \sin\vartheta \cos\psi \, \hat{j}_2 + \cos\vartheta \, \hat{j}_3$

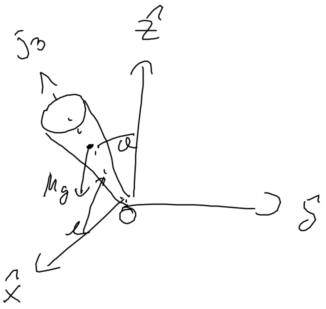
$\Rightarrow p_\varphi = \underline{L}_{rel} \cdot \underline{\hat{z}}$ Projektion von $\underline{L}_{rel}$ auf die raumfeste $\hat{z}$-Richtung!

beachte: p_φ ist Erhaltungsgröße, ~~d~~ falls $U=0$
da dann φ zyklisch!

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = J_1 \omega_1 \cos\psi - J_2 \omega_2 \sin\psi$$
$$= \underline{L}_{rel} \cdot \underline{\hat{k}}$$

$\Rightarrow$ Konstruktion der Hamiltonfunktion via

$$H = \psi p_\psi + \varphi p_\varphi + \vartheta p_\vartheta - L$$



Beispiel: Schwerer symmetr. Kreisel

Auflagepunkt $\neq$ Schwerpunkt
(0)   (S)

Trägheitsmomente bzgl 0:
(benutze Steiner'schen Satz
mit $\underline{a} = l \hat{j}_3$

$$\tilde{J}_n = J_n + M(a^2 - (\underline{a} \cdot \underline{n})^2)$$

$$\Rightarrow \tilde{J}_3 = J_3$$
$$\tilde{J}_1 = \tilde{J}_2 = J + Ml^2$$

Trägheitsmoment bzgl Achse $\perp \hat{j}_3$

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion

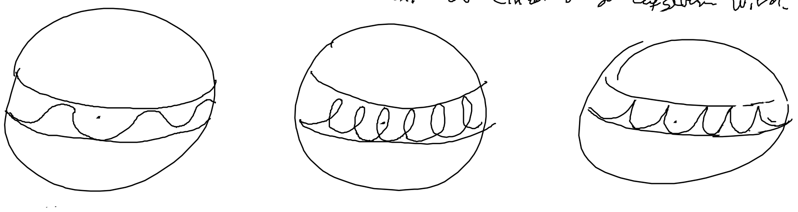
$$L = T - V = \frac{1}{2}(J + Ml^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 - Mgl\cos\vartheta$$
$$= \frac{1}{2}(J + Ml^2)(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 - Mgl\cos\vartheta$$

$\Rightarrow \varphi$ und ψ sind zyklisch $\Rightarrow p_\psi = J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta) = \text{const}$
$p_\varphi = \text{const}$

Aus diesen Erhaltung, plus der Erhaltung der Gesamtenergie folgt
$\rightarrow$ Einzige richtige Variable ist $\vartheta = \vartheta(t)$!
Öffnungswinkel der Figurenachse relativ zu L

Mögliche Bewegungen

Veranschaulichung, indem die Schnittkurve der Figurenachse mit der Einheitskugel aufgetragen wird.



- Begrenzung der Werte von Θ durch die Forderung

  $T_{rot} \geq 0$