

$$\{q_n\}, \{p_n\} \rightarrow \{Q_n\}, \{P_n\}, \quad n=1, \dots, f$$

Kanon-Transformation: Hamilton-Gl. bleiben forminvariant

es gibt via "Erzeugende", z.B.  $M_1(\{q_n\}, \{Q_n\})$

$$P_n = \frac{\partial M_1}{\partial q_n}, \quad P_n = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_n}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial \epsilon}$$

Beispiel

$$\textcircled{1} M_1 = -\sum_{n=1}^f q_n Q_n \Rightarrow p_n = -Q_n, \quad P_n = q_n$$

Vertauschung von  
Ordnung und Impulsen!  
(Koordinat)

reflektiert, dass Koordinate und zugehörige Impulse  
in dem Hamiltonformalismus auf derselben Stufe stehen!

$$\textcircled{2} M_2(\{q_n\}, \{P_n\}) = \sum_{n=1}^f q_n P_n$$

$$\text{benutze } p_n = \frac{\partial M_2}{\partial q_n} = P_n$$

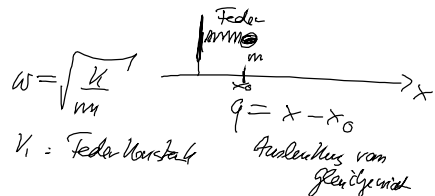
$$Q_n = \frac{\partial M_2}{\partial P_n} = q_n$$

"Identische Transformation", dasselbe gilt auch  $M_3(\{p_n\}, \{Q_n\}) = -\sum_{n=1}^f p_n Q_n$

③ Harmonischer Oszillator in 1 Dimension

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

z.B. Teilchen an Feder



$$\text{Wähle } M_1(q, Q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \cot Q$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial M_1}{\partial q} = m \omega q \cot Q$$

$$P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

(da  $\frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ )

$$q = \sqrt{\frac{zP'}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$$

$$\begin{aligned} \text{und } p &= m\omega q \cot Q \\ &= m\omega \sqrt{\frac{zP'}{m\omega}} \sin Q \frac{\cos Q}{\sin Q} \\ &= \sqrt{m\omega zP'} \cos Q \\ &= p(Q, P) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array} \right\}$$

transformierte  
Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= H + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\text{Null}} = \frac{(p(Q, P))^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 (q(Q, P))^2 \\ &= \frac{2m\omega P \cos^2 Q}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \frac{zP'}{m\omega} \sin^2 Q \\ &= \omega P (\underbrace{\cos^2 Q + \sin^2 Q}_1) = \omega P \end{aligned}$$

Die neue Hamiltonfunktion reduziert sich also auf eine sehr einfache Form!

$$\widehat{H} = \omega P \quad (\oplus)$$

und  $Q$  ist zyklische Koordinate! (denn  $\frac{\partial \widehat{H}}{\partial Q} = 0$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overset{\text{Hamilton-Gl.}}{\dot{P}} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial Q} = 0 &\Rightarrow P \text{ ist Erhaltungsgröße} \\ &\Rightarrow P = \alpha = \text{const} \end{aligned}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial P} = \omega = \text{const} \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\Rightarrow Q(t) = \omega t + \beta \quad (\beta = \text{const})$$

$\Rightarrow$  Für die ursprüngl. Koordinate  $q$  folgt:

$$q = \sqrt{\frac{zP'}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P) = \sqrt{\frac{2\kappa}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

entsprechend

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = \sqrt{2m\omega A} \cos(\omega t + \beta)$$

$\omega, \beta = \text{const}$

hamiltonsche  
Schwingung!

## II.15 Zur Struktur des Phasenraums

Wir haben gesehen:

die  $\dot{q}_n$ 's und  $\dot{p}_n$ 's sind im Hamilton-Formalismus nicht voneinander  
ausgezeichnet (durch Kanon. Transformation lassen sie sich z.B. ineinander-  
transformieren!)

Konkrete diese dreifache Symmetrie nun durch Einführung einer neuen Notation

Betrachte zunächst ein System mit  $f=1$

$\Rightarrow$  Hamilton-Variablen:  $q, p \Rightarrow$  der Phasenraum, der durch  $q$  und  $p$   
aufgespannt wird, hat die Dimension  
 $2f=2$

Führe folgende Größen ein:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \underline{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor im 2-dim. Phasenraum
Ableitungsvektor von  $H$  nach den Komponenten von  $x$ 
Matrix

Damit lassen sich die drei Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

umschreiben in :  $\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H_x}$  Kompakte Notation!

Einige Eigenschaften der Matrix  $\underline{J}$  :

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{J}^T$$

Inverse  
1  
transponierte Matrix  
(Spiegelung an der Diagonalen)

für die Inverse

$$\text{benutze } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\dots)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

also:  $\underline{J}^{-1} = \underline{J}^T = -\underline{J}$

Folgerungen:

- aus  $\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H_x}$  ergibt sich  $\underline{J}^{-1} \underline{\dot{x}} = -\underline{J} \underline{\dot{x}} = \underline{H_x}$

- und  $\underline{J}^2 = \underline{J} \cdot \underline{J} = \underline{J} \cdot (-\underline{J}^{-1}) = -\underline{J} \cdot \underline{J}^{-1} = -\underline{1}$  Einheitsmatrix

Verallgemeinerung auf viele Freiheitsgrade

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H_x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} \underline{0}_{f \times f} & \underline{1}_{f \times f} \\ -\underline{1}_{f \times f} & \underline{0}_{f \times f} \end{pmatrix}$$

2f-dimensionale Vektoren  
f x f Einheitsmatrix

Damit lassen sich die Bewegungsgl.

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad \text{schreiben als}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{J} \underline{H_x}$$

Ziel Nummer:

Kanonische Transformation in kompakter Notation

Erklärung:

Es gibt vier verschiedene Darstellungen

a)  $M_1(q_u, \{Q_u\}, t)$

$$\Rightarrow p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m} = p_m(q_u, \{Q_u\}, t) \quad \textcircled{1}$$

$$P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m} = P_m(q_u, \{Q_u\}, t) \quad \textcircled{2}$$

Damit  $\textcircled{1}$  nach den  $\{Q_u\}$  auflösbar ist, muß gelten

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_u} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_u \partial q_m} \neq 0 \quad \forall m, u$$

Wegen  $\textcircled{2}$  impliziert das, dass  $\frac{\partial p_m}{\partial Q_u} = -\frac{\partial P_u}{\partial q_m} \quad (\neq 0)$

$\neq a$

b) analog für  $M_2(q_u, \{P_u\}, t)$

$$p_m = \frac{\partial M_2}{\partial q_m}, \quad Q_m = \frac{\partial M_2}{\partial P_m}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_m}{\partial P_u} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial P_u \partial q_m} = \frac{\partial Q_u}{\partial q_m} \quad (\neq 0)$$

$\neq b$

c) für  $M_3(p_u, \{Q_u\}, t)$

$$\text{aus } q_m = -\frac{\partial M_3}{\partial p_m}, \quad P_m = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_m}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_m}{\partial Q_u} = \frac{\partial P_u}{\partial p_m} \quad \neq c$$

d) für  $M_q$  ( $\{q_i\}, \{P_i\}, t$ )

$$\text{aus } q_m = -\frac{\partial M_q}{\partial p_m}, \quad Q_m = \frac{\partial M_q}{\partial P_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q_m}{\partial P_n} = -\frac{\partial Q_n}{\partial p_m}} \quad (*d)$$

Benutze nun wieder die kanonische Vertauschung

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{y} := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

Vektor der transformierten Koordinat / Impulse

Damit lasse die Ableitung in  $(*a) \dots (*d)$  schreiben als

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = : \left( \underline{M} \right)_{\alpha\beta} \quad \text{mit } \alpha, \beta = 1, \dots, f$$

Dabei hat die Matrix  $\underline{M}$  folgende Struktur

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

$2f \times 2f$  Matrix

zerfällt in vier Blöckmatrix

$$\text{wobei z.B. } \left( \frac{\partial q}{\partial Q} \right)_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, f \\ j=1, \dots, f \end{matrix}$$

entsprechend:

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = : \left( \underline{M}^{-1} \right)_{\alpha\beta}$$

Dies folgt aus :

$$\sum_{\gamma=1}^{zf} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{zf} \underline{\underline{M}}_{\alpha\gamma} \underline{\underline{M}}^{-1}_{\gamma\beta}$$

$$\text{also: } \underline{\underline{M}}^{-1}_{\gamma\beta} = \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_{\beta}}$$

Mit dieser Definition lassen sich ~~(\*)a~~ - ~~(\*)d~~

wie folgt zusammenfassen

$$\underline{\underline{M}}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{zf} \sum_{\nu=1}^{zf} \underline{\underline{J}}_{\alpha\mu} \underline{\underline{J}}_{\beta\nu} \underline{\underline{M}}^{-1}_{\nu\mu} \quad (*)$$

Um das ~~(\*)~~ zu zeigen, schreiben wir die gl. zunächst in Matrixform

$$\sum_{\nu=1}^{zf} \underline{\underline{J}}_{\beta\nu} \underline{\underline{M}}^{-1}_{\nu\mu} = \underline{\underline{J}}_{\beta\mu} \underline{\underline{M}}^{-1} \\ = \left( \underline{\underline{J}}_{\beta\mu} \underline{\underline{M}}^{-1} \right)^T_{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{zf} \underline{\underline{J}}_{\alpha\mu} \left( \underline{\underline{J}}_{\beta\mu} \underline{\underline{M}}^{-1} \right)^T_{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \left( \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1} \right)^T \quad (**)$$

Um zu zeigen, dass das stimmt, nehme wir die rechte Seite an

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{-1} & \underline{0} \end{array} \right) \left[ \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{-1} & \underline{0} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array} \right) \right]^T \\ & \qquad \qquad \qquad \underline{J} \qquad \qquad \qquad \underline{J} \qquad \qquad \qquad \underline{M^{-1}} \\ & = \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{-1} & \underline{0} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \hline -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{array} \right)^T = \left( \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T & -\left( \frac{\partial Q}{\partial p} \right)^T \\ \hline -\left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T & \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^T \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left( \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T & -\left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^T \\ \hline \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T & -\left( \frac{\partial Q}{\partial p} \right)^T \end{array} \right) \end{aligned}$$

Linke Seite von (\*\*)

$$\underline{M} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{array} \right) \xrightarrow{(*)a - (*)d} \left( \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T & -\left( \frac{\partial Q}{\partial p} \right)^T \\ \hline -\left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T & \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^T \end{array} \right)$$

entspricht offensichtlich dem rechten Seite von (\*\*)

Formuliere nun (\*) noch etwas um

$$\underline{M} = \underline{J} (\underline{J} \cdot \underline{M}^{-1})^T \quad | \cdot \underline{J} \text{ von links}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{J} \cdot \underline{M} &= \underbrace{\underline{J}^2}_{-1} (\underline{J} \cdot \underline{M}^{-1})^T = -(\underline{J} \cdot \underline{M}^{-1})^T \\ &= -(\underline{M}^{-1})^T \underline{J}^T \\ & \qquad \qquad \qquad \underline{J}^{-1} = -\underline{J} \end{aligned}$$

$$\left( \underline{A} \cdot \underline{B} \right)^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$$

$$\Rightarrow \underline{J} \cdot \underline{M} = -(\underline{M}^{-1})^T (-\underline{J})$$

multipliziere von links mit  $\underline{M}^T$

$$\Rightarrow \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{M}^T (\underline{M}^{-1})^T \underline{J}$$



$$= \underbrace{\left( \underline{M}^{-1} \cdot \underline{M} \right)^T}_{\underline{1}} \cdot \underline{J} = \underline{J}$$

$$\left( \underline{M} \right)_{2f} = \frac{dx_i}{dy_j}$$

Ergebnis

$$\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$$

mit  $\underline{M}$  ist die Matrix der Ableitungen  
"alter" nach "neuer" Variablen

$\Leftrightarrow$  <sup>Matrix</sup> zweite Ableitung der  
Erzeugnisse der Kanon-Transformation!

$$\left( \text{siehe } \textcircled{*a} - \textcircled{*ad} \right)$$

Bedeutung:

Die Matrix  $\underline{J}$  stellt eine "Metrik" im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum dar,  
welche invariant unter Kanonischen Transformationen !!

$\underline{J}$  als metrischer Tensor ("Metrik")

$\Rightarrow$  Definiert ein Skalarprodukt  $\rightarrow$  metrisch