nicht-holonome Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i}(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)\cdot d\underline{r}_i + a_\lambda(\underline{r}_1,\underline{r}_2,\dots,\underline{r}_N,t)\,dt=0 \qquad \lambda=1,\dots,p \quad i=1,\dots,N$$

Vektor ($\underline{a}_{\lambda,i}$) Skalar ($a_\lambda$)

Spezialfall

holonome Zwangsbed.: $A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)=0$

$$\frac{d}{dt}A_\lambda = 0 \quad (1)$$

Kettenregel partielle Zeitableitung

andererseits $\frac{d}{dt}A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{N} \nabla_i A_\lambda\cdot\dot{\underline{r}}_i + \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$

totale Differential bzgl. der Zeit

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \nabla_i A_\lambda\cdot d\underline{r}_i + \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}dt\right)\frac{1}{dt}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

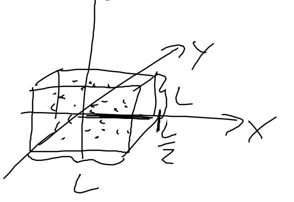
identifizieren:

$$\underline{a}_{\lambda,i}=\nabla_i A_\lambda \quad , \quad a_\lambda=\frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\underline{a}_{\lambda,i}\cdot d\underline{r}_i + a_\lambda dt = 0$$

iii) Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen

Beispiel: Teilchen eines Gases im Kasten



$$-\frac{L}{2}\le x_i, y_i, z_i \le \frac{L}{2}$$

skleronom!

Keine echte Reduktion von Freiheitsgraden wie im holonomen Fall!!

$$f = 3N$$

Wir nehmen nun an:

Die (wie immer gearteten) Zwangsbedingungen werden durch Zwangskräfte erzwungen

$\Rightarrow$ Zwangskräfte auf Teilchen i : $\underline{Z}_i$

$\Rightarrow$ Die $\underline{Z}_i$ kommen zu den ansonsten vorhandenen Kräften $\underline{F}_i$ hinzu

$\Rightarrow$ Ergänzung der Newton'schen BWGL

$$\boxed{m\ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i}$$

(z.B. ebenes Fadenpendel:
$\underline{F}$: Schwerkraft
$\underline{Z}$: Fadenkraft)

Frage: Wie sollen die $\underline{Z}_i$ beschrieben werden?

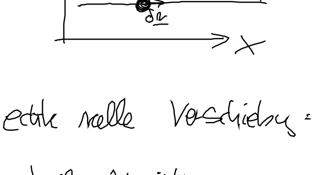
II.3. Virtuelle Verrückungen, d'Alembertsches Prinzip

Definition:

virtuelle Verrückung $\delta\underline{r}_i$ $\hat{=}$ infinitesimale Änderung der Koordinaten, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und die zu einem festen Zeitpunkt t durchgeführt wird!

$\Rightarrow$ virtuelle Verrückung $\neq$ tatsächlichen (reellen) Verschiebung $d\underline{r}_i$
im Allgemeinen in einem Zeitintervall dt

Beispiel: Perle auf bewegtem Draht (2 Dim.)



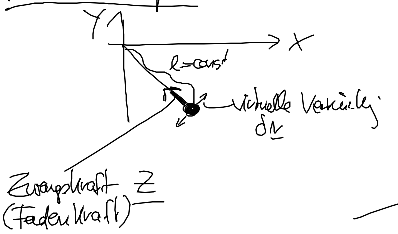
Bewegung mit Geschwindigkeit $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

Perle kann sich auf Draht bewegen (Zwangsbed)

echte reelle Verschiebung: $d\underline{r} = (dx, dy)$ mit $dy = v\,dt$

virtuelle Verrückung: $\delta\underline{r} = (\delta x, 0)$ — da instantan!! $dt = 0$

Anderes Beispiel   ebenes Pendel



man sieht: $\underline{Z} \perp \delta \underline{r}$!!

Allgemein fordert man (Postulat!)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{"virtuelle Arbeit"}} = 0}$$

Die Zwangskräfte leisten in Summe über alle Teilchen keine Arbeit !!

Beachte: virtuelle Arbeit für einzelne Teilchen kann ungleich Null sein, aber in Summe muss Null herauskommen

Mit diesem Postulat schreiben wir die (ergänzte) Newton'sche BWGL um:

(1) $\dot{\underline{p}}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i \iff m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i = 0$ (1a)

$$\iff \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i \right) = 0$$

Postulat

(2) $\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$

Kombiniere (1a) $\cdot\, \delta \underline{r}_i$ und summiere dann über i

Multiplikation

virtuelle Verrückung

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i - \underline{Z}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$$

d'Alembertsches Prinzip

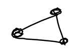
Es gilt für alle erlaubten virtuellen Verrückungen!

Bemerkungen:

a) Die Zwangskräfte $\underline{Z}_i$ tauchen nicht mehr explizit auf!

aber: Formulierung ist immer noch unpraktisch, da die virtuellen Verrückungen möglicherweise voneinander abhängig sein können!

(Beispiel: ~~Schütteln~~ "Rütteln" an den Massenpunkten eines starren Körpers)



b) Das d'Alembertsche Prinzip wird manchmal als Verallgemeinerung der Newton'schen BWGL betrachtet

Spezialfall: Keine Zwangsbedingungen vorhanden

$\Rightarrow$ alle $\delta\underline{r}_i$ sind erlaubt, alle sind unabhängig

aus $\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i)\cdot\delta\underline{r}_i$ folgt das Verschwinden jedes Terms

$\Rightarrow m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i = 0$ Newton!

II.4. Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir nehmen an:

Die Zwangsbed. lassen sich schreiben in der Form

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i}(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)\cdot d\underline{r}_i + a_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t)\,dt = 0 \qquad (*)$$

$\lambda = 1,\dots,p$

(*) ist allgemein, enthält auch den Spezialfall "holonom" (auch nicht-holonom!)

falls $\underline{a}_{i,\lambda} = \nabla_i A_\lambda$, $a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$ mit $A_\lambda = A_\lambda(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N,t) = 0$

Anwendung auf virtuelle Verrückung

d.h. $d\underline{r}_i \longrightarrow \delta\underline{r}_i$

$dt = 0$ (instantan!)

Kombiniere mit (*)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \overbrace{\underline{a}_{i,\lambda}}^{\underline{a}_{\lambda,i}\text{ (Notation)}}\cdot\delta\underline{r}_i = 0 \qquad (a)$$

liefert Zusammenhang
zw. Zwangsbedingung und virtueller Verrückung!

Andererseits hatten wir gesehen

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (b)$$

gesamte virtuelle Arbeit verschwindet

$\Rightarrow$ Sinnvoller Ansatz für Zwangskraft

$$\underline{Z}_i = \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}$$

Zwangskraft $\Leftrightarrow$ Zwangsbedingung

Koeffizient!

Einsetzen $\Rightarrow$ (b) sofort erfüllt wegen (a)!

Kombinieren mit der ergänzten Newton'schen BWGL

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \underline{Z}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, \underline{a}_{i,\lambda}}$$

Vektorgleichung

Lagrange-Gleichungen erster Art!
(Lagrange I)

Bemerkungen:

- Umschreiben in Komponentenform

(Annahme $m_i = m$)

$$\boxed{m \ddot{x}_k - F_k - \sum_{\lambda=1}^{p} \mu_\lambda \, a_{k,\lambda} = 0}$$

$k = 1, \ldots, 3N$

(z.B. $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \ldots$)

Diese $3N$ Gleichungen werden ergänzt durch die p Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda dt = 0 \quad !$$

- Vorgehensweise in der Praxis ("Kochrezept")

– Bestimme zunächst die p Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i} \cdot d\underline{r}_i + a_\lambda dt = 0 \quad , \lambda = 1,..,p$$

bzw. im holonomen Fall $A_\lambda = A_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0$

$$\Rightarrow \underline{a}_{\lambda,i} = \nabla_i A_\lambda \quad , \quad a_\lambda = \frac{\partial A_\lambda}{\partial t}$$

– Löse die $3N+p$ Gleichungen

für die Komponenten $\underbrace{x_{i}(t) \text{ und } \mu_\lambda}_{3N+p \text{ Unbekannte!}}$

<u>fertig</u> !

– Falls gewünscht, bestimme die Zwangskräfte aus unserem Ansatz

$$\underline{Z}_i = \sum_{\lambda=1}^{p} \underbrace{\mu_\lambda \underline{a}_{\lambda,i}}_{\text{Koeffizienten}}$$

<u>Trotzdem</u>:
Insgesamt ist das immer noch ein recht umständliches Verfahren, da $3N+p$ Gleichungen gelöst werden müssen

<u>Vorteil</u>: Benutzbar für recht allgemeine Zwangsbedingungen, die sich in der Form $\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_{\lambda,i} \ldots$ schreiben lassen!

II.5. Generalisierte Koordinaten

Wir spezialisieren nun auf den Fall <u>holonomer Zwangsbedingungen</u>

d.h. $A_\lambda(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, t) = 0 \quad , \lambda = 1, \ldots, p$

⇒ Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade.

$$f = 3N - p$$ (3N: Punktteilchen im dreidim. Raum)

<u>Idee:</u>

Finde einen Satz von f „problemangepassten" Koordinaten — d.h. Koordinaten, die die Zwangsbedingungen bereits berücksichtigen und unabhängig voneinander sind!!

⇒ „generalisierte Koordinaten"

Notation

$$\underbrace{q_1, \ldots, q_f}$$ f Freiheitsgrade!

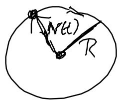
Zusammenfassende Notation! $\{q_k\}$, $k = 1, .., f$

Transformationsgleichungen:

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t) = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$$

<u>Beispiele:</u>

(i) Bewegung eines Massepunkts auf Kugeloberfläche mit konstantem Radius R



Zwangsbed.: $\underbrace{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}_{(\underline{r}(t))^2} = R^2 \quad \forall t$

$$f = 3 \cdot \overset{(N)}{1} - 1 = 2$$

Wir brauchen 2 generalisierte Koordinaten!

⇒ Winkel $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$

(Kugelkoordinaten!)

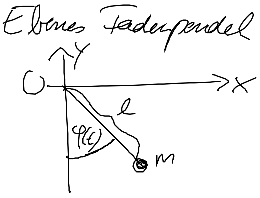
Transformationsgleichungen

$x(t) = R \sin\vartheta(t) \cos\varphi(t)$

$y(t) = R \sin\vartheta(t) \sin\varphi(t)$

$z(t) = R \cos\vartheta(t)$

(ii) Ebenes Fadenpendel



Zwangsbed: $x(t)^2 + y(t)^2 = l^2$

$f = 1$

$\Rightarrow$ Generalisierte Koordinate $\varphi(t)$

Transformationsgl.: $x = l \sin\varphi(t)$
$y = -l \cos\varphi(t)$

Nehme nun an:
Für ein gegebenes Problem mit ~vorkommenen~ Zwangsbedingungen seien die $\{q_k\}$ und die Transformationsgleichungen $\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_k\}, t)$ gefunden

Damit schreiben wir jetzt das d'Alembertsche Prinzip um!

II.6. Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Ausgangspunkt: $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \quad (*)$$

Wir benötigen:
Zusammenhang virtuelle Verrückung $\delta\underline{r}_i$ und $\{q_k\}$

$$\delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Keine zeitliche Variation, da $\delta t = 0$ $\Rightarrow$ virtuelle Verrückungen sind instantan!

Aus $(*)$ $$\sum_{i=1}^{N} \left[(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \overbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}^{\delta \underline{r}_i} \right] = 0$$

Führe ein: $$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$ „generalisierte Kraft"

Aus $(*)$ $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{f} Q_k \delta q_k}$$