Teilchen im elektromagnetischen Feld

Masse m, Ladung q, elektr. Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ und magnet. Feld $\underline{B}(\underline{r},t)$, e Ladung

Newton: $m\ddot{\underline{q}} = \underline{F}^{\text{Lorentz}} = e\underline{E} + \frac{e}{c}(\dot{\underline{q}} \times \underline{B})$ (CGS-System)

$\underline{q} = \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Geschw.

Welche Lagrangefunktion führt auf diese BWGL ?
Problem: Lorentzkraft ist ja nicht konservativ!

Konservativer Grenzfall:
$\underline{B} = 0$ : .... (gestern!) $\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 - \underbrace{e\,\phi(\underline{q},t)}$

Energie des Teilchens im Potential $\phi(\underline{q},t)$

$\underline{E} = -\nabla\phi(\underline{q},t)$

skalares Potential (elektrostatisches)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \Rightarrow m\ddot{q}_k = e(-\nabla\phi)_k = e(\underline{E})_k$$

Allgemeiner Fall:

- $\underline{B}(\underline{q},t) \neq 0$, aber $\underbrace{\nabla \cdot \underline{B}}_{\text{Divergenz}} = 0$ (Maxwell) es gibt keine magnetische Quellen!! (Monopole!)

$$\Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$$

Vektorpotential

- Dann folgt für das elektr. Feld: $\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\phi(\underline{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$.

(hier ohne Beweis
→ siehe VL Elektrodynamik)

Ansatz für die Lagrangefunktion:

$$L = \underbrace{T}_{\frac{m}{2}\dot{q}_k^2} - \underbrace{\left(e\phi(\underline{q},t) - \frac{e}{c}\dot{\underline{q}} \cdot \underline{A}(\underline{q},t)\right)}_{\text{verallgemeinertes Potential } \tilde{V}}$$

Test:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -e\frac{\partial \phi}{\partial q_k} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(q,t)\right) \quad (q_k = x,y,z)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \frac{d}{dt}(m\dot q_k) + \frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\sum_{l=1}^{3}\dot q_l A_l}_{\sum_{l=1}^{3}\underbrace{\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_k}}_{\delta_{lk}} A_l = A_k}\Bigg)$$

$$= m\ddot q_k + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_k(q,t) = m\ddot q_k + \frac{e}{c}\Bigg(\underbrace{\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial A_k}{\partial q_l}\dot q_l\right)}_{(\dot{\underline{q}}\cdot\nabla)A_k} + \frac{\partial A_k}{\partial t}\Bigg)$$

$$\dot q_x\frac{\partial A_k}{\partial x} + \dot q_y\frac{\partial A_k}{\partial y} + \dot q_z\frac{\partial A_k}{\partial z}$$

Kombiniere:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

nicht-konservativer Charakter des Problems steckt im Ansatz für $L$ !

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot q_k = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(q,t)\right) - \frac{e}{c}(\dot{\underline{q}}\cdot\nabla)A_k(q,t)$$

benutze: $\underline{E} = -\nabla\phi(q,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

$$m\ddot q_k = e\left(\underline{E}(q,t)\right)_k + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(q,t)\right) - (\dot{\underline{q}}\cdot\nabla)\underline{A}_k(q,t)\right) \quad (*)$$

$$\left(\dot{\underline{q}} \times (\nabla \times \underline{A})\right)_k = \left(\dot{\underline{q}} \times \underline{B}(\underline{q},t)\right)_k$$

denn $\left(\dot{\underline{q}} \times (\nabla \times \underline{A})\right)_k = \left(\nabla(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}) - \underline{A}(\dot{\underline{q}}\nabla)\right)_k = \left(\nabla(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}) - (\dot{\underline{q}}\cdot\nabla)\underline{A}\right)_k$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

Wir finden also

$$m\ddot{q}_k = e\, E_k(\underline{q},t) + \frac{e}{c}\left(\dot{\underline{q}} \times \underline{B}(\underline{q},t)\right)_k$$

das ist genau die entsprechende Newton'sche BWGL!

Unser Ansatz $L = T - e\left(\phi(\underline{q},t) - \frac{1}{c}\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t)\right)$
war also erfolgreich!

Bemerkungen:

- Unsere Konstruktion einer Lagrangefunktion im elektromagnet. Feld mag widersprüchlich erscheinen, denn $\underline{F}^{\text{Lorentz}}$ ist ja nicht konservativ

allgemein gilt für nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \leftarrow \text{generalisierte Kraft}$$

Eine verallgemeinerte Lagrangefunktion $L = T - \tilde{V}$ ← generalisiertes Potential
läßt sich dann formulieren, wenn

$$Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k}$$

(durch Einsetzen kommt man dann auf $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

speziell Lorentzkraft:

$$\tilde{V} = e\left(\phi - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(q,t)\right)$$

Für Reibungskräfte gibt es kein entsprechendes $\tilde{V}$ !

- Zusammenhang mit dem Thema Eichtransformation

Elektrodynamik:

Die Transformation $\underbrace{\underline{A}(q,t)}_{\text{Vektorpotential}} \longrightarrow \underline{A}'(q,t) = \underline{A}(q,t) + \underbrace{\nabla}_{\text{Gradient}} \overbrace{\chi(q,t)}^{\text{Skalare Fkt.}}$

läßt $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}(q,t)$ invariant !

(denn rot grad $\chi = 0$)

analog: $\underbrace{\phi(q,t)}_{\text{Skalares Potential}} \rightarrow \phi'(q,t) = \phi(q,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(q,t)$

läßt $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$ invariant !

$\Rightarrow$ Maxwellgleichungen bleiben unverändert!

Betrachte nun entsprechende Transformation der Lagrangefunktion

$$L \longrightarrow L' = T - e\underbrace{\left(\phi' - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}'\right)}_{\text{transformiertes verallgemeinertes Potential}}$$

$$= T - e\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A} - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\nabla\chi\right)$$

Transformationsformel für $\phi'$, $A'$

$$= T - e\left(\phi - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \dot{\underline{q}}\cdot\nabla\chi\right)$$

$$= T - e\left(\phi - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}\right) + \frac{e}{c}\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\chi}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

$$= T - \underbrace{\underbrace{e\left(\phi - \frac{1}{c}\dot{q}\cdot A\right)}_{\tilde{V},\ \text{nicht-transformiert!}}}_{L} + \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right)$$

$$\Rightarrow L' = L + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\chi(q,t)\right)}$$

hat genau die Form, die zu Beginn des Kapitels als zulässige Eichtransformation von $L$ vorgestellt wurde!

$$\left( L' = L + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_f, t) \right)$$

läßt die Lagrangegleichungen invariant!

Die Eichtransformationen der Elektrodynamik führen auf eine Umeichung der Lagrange-Funktion, die die BWGL invariant lassen

→ „Physik bleibt erhalten"!

- Als weitere wichtige Invarianz der Lagrangegleichungen betrachten wir Transformationen der generalisierten Koordinaten!

„Forminvarianz"

Sei $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_f, t)$

$q_k = q_k(Q_1, \dots, Q_f, t)$ umkehrbar eindeutiger Zusammenhang

und $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.

Dann sind die $Q_1, \dots, Q_f$ Lösungen der Lagrangegleichungen zur transformierten Lagrangefunktion

$$\tilde{L} = L\left(\{q_k(\{Q_i\}, t), t\}, \{\dot{q}_k(\{Q_i\}, t)\}, t\right)$$

drücke also die bekannte Lagrangefunktion $L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$ durch die neuen Koordinaten aus

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = 0$$

Das heißt, die Wahl der generalisierten Koordinaten ist willkürlich, nur ihre Anzahl $f$ liegt fest!

„Forminvarianz"

hier ohne Beweis (gute Übung!)

## II.11. Symmetrien und Erhaltung

Ziel:

Zeige mit Hilfe des Lagrange-Formalismus, dass bestimmte Symmetrien eines physikalischen (mechanischen) Systems ($\hat{=}$ Invarianzen gegenüber bestimmten Transformationen) zur Erhaltung entsprechender physikalischer Größen $I$ führen (d.h. $\frac{dI}{dt} = 0$)

$I$ ist dann eine „Konstante der Bewegung"

Die Zusammenhänge sind Inhalt des Theorems von Emmy Noether (1918)
„Noether-Theorem"

Betrachte im Folgenden konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

### II.11.1. Zeittranslationssymmetrie

$\hat{=}$ Physikalische Eigenschaften des Systems hängen nicht vom Zeitpunkt der Messung ab

Wann ist das erfüllt?

i) skleronome (d.h. nicht explizit zeitabhängige) Zwangsbedingungen

d.h. Transformationsformel

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f) \quad , \text{ d.h. } \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0$$

$$\text{und } \dot{\underline{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

ii) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, also $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ aber keine Zeitabhängigkeit!!

Das impliziert, dass $V$ nicht explizit zeitabhängig ist!
Potential

Folgerungen:

Betrachte das totale zeitliche Differential von $L$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)$$

kein $\frac{\partial L}{\partial t}$-Term! wegen ii)

$$= \sum_{k=1}^{f} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) = \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

benutze Lagrange-BW Gl.

inverse Produktregel

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} L - \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \underbrace{\left( L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)}_{\text{Erhaltungsgröße!}} = 0} \quad (*)$$

Interpretation:

Beachte $L = T - V$ und $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ für konservative Systeme

und $\underset{\text{kinet. Energie}}{T} = \frac{1}{2} \sum_{lm} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_l}\right) \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_m}\right)}_{T_{lm}} \dot{q}_l \dot{q}_m$ für skleronome Systeme

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{lm} T_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m$$

Damit $\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ (in ✳) ergibt:

$$\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \Big( \overbrace{\frac{1}{2} \sum_{lm} T_{lm} \delta_{kl} \dot{q}_m}^{\sum_m T_{km} \dot{q}_m}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{lm} T_{lm} \dot{q}_l \delta_{mk}}_{\sum_l T_{lk} \dot{q}_l} \Big)$$

beide Summen liefern dasselbe!

$$= \sum_k \dot{q}_k \sum_m T_{km} \dot{q}_m$$

$$= \sum_{km} T_{km} \dot{q}_k \dot{q}_m = 2T$$

Die Erhaltungsgröße

$$L - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = L - 2T = T - V - 2T$$

$$= -(T+V) = -E$$

✳ impliziert also, dass $\frac{dE}{dt} = 0$, also <u>Erhaltung der Gesamtenergie</u>

<u>Bemerkungen:</u>

- Die Größen $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} =: p_k}$ heißen „generalisierte Impulse"

z.B. „freies" Teilchen ohne Zwangsbed. und ohne Potential $\underline{q} \hat{=} \underline{r}$, $\dot{\underline{q}} = \underline{v}$

$$L = T - \cancel{V}$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\underline{q}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2)$$

$$\Rightarrow p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = m\dot{q}_k \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p} = m\underline{v}$$ „normaler Impuls"

• Die Funktion

$$\boxed{H := \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}}$$

heißt „Hamilton-Funktion"

Für holonome, skleronome konservative Systeme (ohne Zeitabh. im Potential) ist $H = T + V = E$ und $E$ ist Erhaltungsgröße!

Gesamtenergie