

neue Notation:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \quad \underline{J} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{1} \\ \hline -\underline{1} & \underline{0} \end{array} \right) \text{ f.z.f. Blockmatrix}$$

Zf Koordinate!

$$x_k, \quad k=1, \dots, 2f$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{J} \underline{H}_x$$

Kanon. Transformation:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

falls Hamilton-Fkt. invariabel!

$$\underline{M}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\underline{M}^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Hilfs-Matrix "verschleift sich" die Jacobi-Matrix der kanonischen Transformation! ($\hat{=}$ Matrix der Z-Änderung)

Einsatz:

z.B. Erzeugende $M_1 = M_1(q_n, p_n, t)$

$$p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m}, \quad P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m}$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_n} \neq 0! \Leftrightarrow \frac{\partial p_m}{\partial Q_n} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_n \partial q_m} \neq 0$$

$$= -\frac{\partial P_m}{\partial q_n}$$

es gilt:

$$\underline{M} = \underline{J} (\underline{J} \underline{M}^{-1})^T$$

$$\Rightarrow \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$$

Die Matrix \underline{J} stellt eine "Metrik" im $2f$ -dimensionalen Phasenraum dar ($\hat{=}$ \underline{J} ist ein metrischer Tensor), welche invariant unter Kanon. Transformation (ausgedrückt durch die Matrix \underline{M}) ist!

Bemerkung dazu:

• Eine Folge von \underline{J} als metrischer Tensor:

Über dem $2f$ -dimensionalen Phasenraum \mathbb{R}^{2f} ist ein verallgemeinertes Skalarprodukt hier speziell eine schief-symmetrische Bilinearform definiert:

$$\left(\underline{x}, \underline{y} \right) := \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} x_\alpha J_{\alpha\beta} y_\beta \quad (\text{*)}$$

Vergleiche mit dem bekannten (euklidischen) Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle_{\text{Eukl.}} &:= \sum_{i=1}^M x_i y_i = \underline{x}^T \underline{g} \underline{y} \quad \text{mit } \underline{g} = \underline{1} \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} M\text{-dim. Vektor} \end{array} \right) \qquad \qquad \qquad \left(\begin{array}{l} \text{Metrischer Tensor} \\ \text{im Euklidischen Raum} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Zurück zu $\textcircled{*}$:

Dieses reell. Skalarprodukt ist „skelfsymmetrisch“, d.h.:

$$\begin{aligned}
 \langle y, x \rangle &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \underline{y}^T \underline{J} \underline{x} = \underline{y}^T (\underline{x}^T \underline{J}^T)^T \\
 &= (\underline{x}^T \underline{J}^T \underline{y})^T \quad \text{benutze } \underline{J}^T = -\underline{J} \\
 &= -(\underline{x}^T \underline{J} \underline{y})^T \\
 &\stackrel{\textcircled{2}}{=} -(\underbrace{\underline{x}, \underline{y}}_{\text{Skalar}})^T = -\langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

es kommt also hier auf die
Trennung an!

(anders als beim ~~reell~~ Euklid. Skalarprodukt!)

„Bilinear“, d.h.:

$$\langle \underline{x}, \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \underline{x}, \underline{y}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \underline{x}, \underline{y}_2 \rangle$$

- Rolle der Kanon. Transformation in diesem Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{x}', \underline{y}' \rangle &= \langle \underline{M} \underline{x}, \underline{M} \underline{y} \rangle \stackrel{\text{Def. } \textcircled{1}}{=} \underline{x}'^T \underline{J} \underline{y}' \\
 &\stackrel{\text{benutze Def. von } \underline{x}', \underline{y}'}{=} \underline{x}^T \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} \underline{y} \quad \text{benutze } \underline{J} = \underline{M}^T \underline{J} \underline{M} \\
 &\stackrel{\text{Def. } \textcircled{1}}{=} \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad (1)
 \end{aligned}$$

Auch sieht man, dass die Kanon. Transformation die Struktur des Phasenraums ~~invariant~~ invariant lässt!

Man sagt:

Die Menge der Matrizen \underline{M} mit der Eigenschaft $\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$ bilden eine Gruppe, nämlich die reelle symplektische Gruppe S über \mathbb{R}^{2f} .

Die Gruppe ist über die oben diskutierte schief symmetr. Bilinearform charakterisiert.

Fazit: Die Invarianz der Kanon. Gleichung $\dot{x} = \underline{J} H_x$ unter Kanonischen Transformationen entspricht einer symplektischen Struktur des Phasenraums.

(genauere Diskussion:
Buch von Scherf)

II.16 Poisson-Klammern

Ausgangspunkt:

Jede mechanische "Observable" ($\hat{=}$ physikalische Größe wie z.B. Energie, (Druck-)Impuls) lässt sich im Hamiltonformalismus als "Phasenfunktion" $g(q, p, t)$ darstellen.

Bsp.: Konserve, skalar: $E = H(q, p, t)$
Energie

Betrachte nun die Zeitentwicklung einer solchen Observable:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial g}{\partial t} \quad \text{totale zeitl. Ableitung}$$

$$= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

benutze
Hamiltonsche
Gf.

$$=: \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Definition:

Für zwei beliebige skalare Observablen $f(q_k, p_k, t)$ und $g(q_k, p_k, t)$ heißt

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

die Poisson-Klammer von f mit g

Bemerkung (zur Def.)

Obige Definition ist identisch mit der in den Büchern von Nolting und Goldstein, während bei Scherdt die Terme auf der rechten Seite vertauscht sind (\Rightarrow andere Vorzeichen!)

Eigenschaften der Poisson-Klammer

(i) Totaler bei der Zeitentwicklung: $\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$

\Rightarrow für nicht explizit zeitabhängige Observablen (d.h. $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$)

folgt also:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}$$

speziell gilt für Erhaltungsgrößen ($\frac{dg}{dt} = 0$)

$$\{g, H\} = 0$$



(ii) Spezialfall von (i):

a) $g = q_k$ offensichtlich nicht explizit zeitabhängig! ($\frac{\partial q_k}{\partial t} = 0$)

-i)

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k = \{q_k, H\}$$

$$= \sum_{m=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial q_k}{\partial p_m} \frac{\partial H}{\partial q_m} \right)$$

benutze Def. der Poisson-Klammer

$$= \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Kanonische Gleichungen!

$$b) \quad q = p_k : \quad \frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k = \dots = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(c) "Fundamentale Poisson-Klammern"

$$\{q_k, q_l\} = 0 \quad \text{hier ohne Beweis}$$

$$\{p_k, p_l\} = 0 \quad \text{benutze Def. der Poisson-Klammer}$$

$$\{q_k, p_l\} = \sum_m \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_m} \frac{\partial p_l}{\partial p_m} - \frac{\partial q_k}{\partial p_m} \frac{\partial p_l}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_m \delta_{km} \delta_{ml} = \delta_{kl}$$

Achtung: es kommt auf die Reihenfolge an!

$$\{p_k, q_l\} = \dots = -\delta_{kl}$$

iv) Poisson-Klammern sind schief-symmetrische Bilinearformen, sie entsprechen also wieder einem verallgemeinerten ("symplektischen") Skalarprodukt im Phasenraum!

$$\{f, g\} = \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_m} \frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial g}{\partial q_m} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_f}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_f} \right)}_{\substack{\text{Zeilenvektor (2f-dim.)} \\ (\underline{f}_x)^T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \underline{0} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{J} \\ \text{2f} \times \text{2f Matrix}}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_f} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}}_{\underline{g}_x}$$

(Notation analog zum früheren eingeführte Vektor $\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$)

Um zu sehen, dass das stimmt, beachte ~~das~~:

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \underline{0} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_f} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}}_{\underline{g}_x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

Also: $\{f, g\} = \underline{f}_x^T \underline{J} \underline{g}_x = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)$ Def. des reellg. Skalarprodukts aus II-15

aufzudecken: $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial x_\beta}$ (*)

Mit der Interpretation ^{der Poissonklammer} als symplektisches Skalarprodukt kann man die Ergebnisse aus (i) und (ii) auch noch kompakter schreiben:

(ii) $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$, $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$, $k=1, \dots, f$

$$\dot{x}_y = \{x_y, H\} \stackrel{\text{①}}{=} \sum_{d=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_y}{\partial x_d}}_{J_{y\beta}} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{y\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$y=1, \dots, 2f$

$$= \left(\underline{\underline{J}} \underline{H}_x \right)_y$$

entspricht unserem früheren
Ergebnis $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}} \underline{H}_x$

Zeige nun noch -

Die Poisson-Klammer ist invariant unter kanonischen Transformationen!